Solución:
Tarea 1. Métodos Numéricos

César Hernández Aguayo

1. Demuestre que la ecuación de movimiento para un péndulo simple como el que se muestra en la figura, ignorando las fuerzas disipativas, está dado por:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0\,, \tag{1}$$

(Puedes hacerlo usando mecánica vectorial, o bien, mecánica analítica.)

Demuestre que si las oscilaciones del péndulo son pequeñas, entonces, a primer orden, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \tag{2}$$

Responde: Qué tipo de errores se estarían cometiendo al usar la ecuación anterior para describir el movimiento del péndulo simple. ¿Qué método usarías para resolver las ecuaciones anteriores?

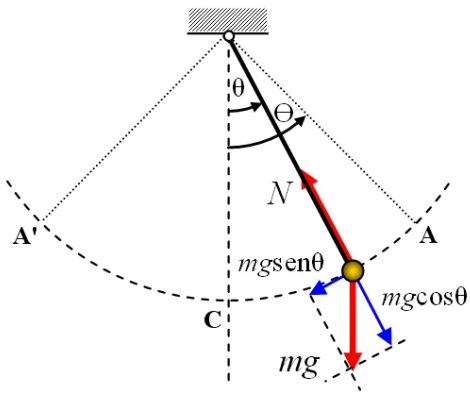

Figura 1: Esquema de fuerzas del péndulo simple.

Solución:

Usando mecánica analítica lo primero que debemos conocer son la energía cinética y la energía potencial de la partícula de masa m.

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,, \qquad V = -mgy.$$

Usando coordenadas polares

$$x = r\sin(\theta) = l\sin(\theta)\,, \qquad y = r\cos(\theta) = l\cos(\theta)$$

donde l es la longitud de la cuerda, tenemos que T y V se convierten en:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2\,, \qquad V = -mgl\cos(\theta).$$

Entonces, el Lagrangiano del sistema es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos(\theta),$$

aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0\,, \quad \rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0.$$

Y finalmente la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\theta} + \omega^2\sin(\theta) = 0\,.$$

En la ecuación anterior se definió el parámetro ω, conocido como la frecuencia angular y está dado por $\omega = \sqrt{g/l}$.

Ahora, si consideramos oscilaciones pequeñas la función seno se puede aproximar a

$$\sin(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

que a primer orden queda como

$$\sin(\theta) \approx \theta + \mathcal{O}(\theta^3)\,.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0\,.$$

Hay varion métodos para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales, entre ellos se encuentran:

- Método de Runge-Kutta.
- Método de Euler.
- Método de Crank-Nicholson.

2. La regla del punto medio se usa para aproximar el valor de una integral definida usando la expansión

$$\int_a^b f(x)dx \approx 2h \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \tag{3}$$

donde $h = (b-a)/2n$ y $x_j = a + (2j-1)/h$.

- Escribe un algoritmo para aproximar el valor de una integral definida usando la regla del punto medio.

ENTRADA:	Los límites de integración a y b El integrando f El número de subibtervalos n
PASO 1:	calcular $h = (b-a)/2n$; e inicializar sum igual a 0
PASO 2:	para j desde 1 hasta n añadir $f(a + (2j-1)/h)$ a sum
SALIDA:	$2h\, sum$

- Usa dicho algoritmo para aproximar el valor $\int_1^2 dx/x$. Use $n = 5$.

PASO 1:	$h = (2-1)/(2 \cdot 5) = 1/10$; $sum = 0$
PASO 2:	$j = 1$: $sum = 0 + 1/(1 + 1/10) = 10/11 = 0.90909091$
	$j = 2$; $sum = 10/11 + 1/(1 + 3/10) = 240/143 = 1.67832168$
	$j = 3$; $sum = 240/143 + 1/(1 + 5/10) = 1006/429 = 2.34498834$
	$j = 4$: $sum = 1006/429 + 1/(1 + 7/10) = 21392/7293 = 2.93322364$
	$j = 5$: $sum = 21392/7203 + 1/(1 + 9/10) = 479378/138567 = 3.45953943$
SALIDA:	$(2/10)(479378/138567) = 0.69190789$

Por lo tanto,

$$\int_1^2 dx/x \approx 0.69190789\,.$$

El valor exacto de la integral es, $\ln 2$, entonces el error absoluto en la regla del punto medio es $|\ln 2 - 0.69190789| \approx 1.239 \times 10^{-3}$.

3. Un esquema para aproximar la raíz de un número positivo y real, a, se basa en la expresión

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n a}{3x_n^2 + a} \tag{4}$$

donde n representa el número de iteración que se está realizando. Nota que x_0 (i.e $n = 0$) corresponde al valor inicial, por lo que n_1 corresponde a la primera iteración, n_2 a la segunda, etc...

- Escribe un algoritmo para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo y real, a, usando esta expresión.

ENTRADA:	número real positivo a
	aproximación de inicio x_0
	parámetro de convergencia ϵ
	número máximo de iteraciones $Nmax$
PASO 1:	para $iter$ desde 1 hasta $Nmax$
PASO 2:	calcular $x_1 = (x_0^3 + 3x_0 a)/(3x_0^2 + a)$
PASO 3:	Si $\lvert x_1 - x_0 \rvert < \epsilon$, SALIDA x_1
PASO 4:	copiar el valor de x_1 en x_0
	fin
SALIDA:	"el número máximo de iteraciones ha sido excedido"

- Usa el algoritmo para $a = 4.0$, usando $x_0 = 0.1$. Realiza 2 iteraciones y calcula los errores absoluto, relativo y porcentual. Realiza mas iteraciones hasta que el error absoluto sea $\epsilon_{abs} \leq 1 \times 10^{-5}$.

Para los parámetros de entrada usamos $a = 4$, $x_0 = 0.1$, $\epsilon = 10^{-5}$ y $Nmax = 10$.

PASO 1:	$iter = 1$
PASO 2:	$x_1 = ((0.1)^3 + 3(0.1)(4))/(3(0.1)^2 + 4) = 0.29801$
PASO 3:	$\lvert x_1 - x_0 \rvert = 0.19801 > 1 \times 10^{-5}$,
PASO 4:	$x_0 = 0.29801$

En la segunda iteración encontramos

PASO 1:	$iter = 2$
PASO 2:	$x_1 = ((0.29801)^3 + 3(0.29801)(4))/(3(0.29801)^2 + 4) = 0.84440$
PASO 3:	$\lvert x_1 - x_0 \rvert = 0.54639 > 1 \times 10^{-5}$,
PASO 4:	$x_0 = 0.84440$

La tercera iteración es

PASO 1:	$iter = 3$
PASO 2:	$x_1 = ((0.84440)^3 + 3(0.84440)(4))/(3(0.84440)^2 + 4) = 1.7486$
PASO 3:	$\lvert x_1 - x_0 \rvert = 0.9042 > 1 \times 10^{-5}$,
PASO 4:	$x_0 = 1.7486$

En la cuarta iteración obtenemos

PASO 1:	$iter = 4$
PASO 2:	$x_1 = ((1.7486)^3 + 3(1.7486)(4))/(3(1.7486)^2 + 4) = 1.9988$
PASO 3:	$\lvert x_1 - x_0 \rvert = 0.25017 > 1 \times 10^{-5}$,
PASO 4:	$x_0 = 1.9988$

La quinta iteración es

PASO 1: $iter = 5$

PASO 2: $x_1 = ((1.9988)^3 + 3(1.9988)(4))/(3(1.9988)^2 + 4) = 1.999999$

PASO 3: $|x_1 - x_0| = 0.001199 > 1 \times 10^{-5}$,

PASO 4: $x_0 = 1.999999$

Finalmente, en la sexta iteración conduce a

PASO 1: $iter = 6$

PASO 2: $x_1 = ((1.999999)^3 + 3(1.999999)(4))/(3(1.999999)^2 + 4) = 2.0$

PASO 3: $|x_1 - x_0| = 1 \times 10^{-6} < 1 \times 10^{-5}$,

SALIDA: $x_1 = 2.0$

La siguiente tabla muestra los errores absoluto, relativo y porcentual del cálculo numérico de las seis iteraciones

$iter$	ϵ_{abs}	ϵ_{rel}	$\epsilon_{\%}$
1	1.70199	0.850995	85.0995
2	1.1556	0.5778	57.78
3	0.2514	0.1257	12.57
4	0.0012	0.0006	0.06
5	1×10^{-6}	5×10^{-7}	5×10^{-5}
6	$< \mathcal{O}(10^{-6})$	$< \mathcal{O}(10^{-7})$	$< \mathcal{O}(10^{-5})$

4. Calcula los siguientes límites y determine la correspondiente tasa de convergencia.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^3+2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^3(1+2/n^3)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2-1/n^3}{1+2/n^3}\\ &= \frac{0-0}{1-0}=\frac{0}{1}=0\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{n^3+2}-0\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{n^3+2}\right|\leq\frac{1}{n^2}\\ &\to \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\infty}=0.\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|<\frac{1}{2\sqrt{n}}\\ &\to \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2e^{\xi}/2-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}1+\frac{xe^{\xi}}{2}\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right| &= \frac{1}{2}\left|xe^{\xi}\right|\leq\frac{1}{2}|x|\\ &\to \mathcal{O}(x)\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-x^3\sin(\xi)/6}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}[1-x^2\sin(\xi)]\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(x)}{x}-1\right| &= \left|x^2\sin(\xi)\right| \leq |x^2|\\ &\to \mathcal{O}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2/2+x^3e^{\xi}/6-1+x^2/2-x^4/24\cos(\xi)-x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}[1+\frac{1}{6}xe^{\xi}-\frac{1}{24}x^2\cos(\xi)]\\ &= 1.\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2}-1\right| &= \left|\frac{1}{6}xe^{\xi}-\frac{1}{24}x^2\cos(\xi)\right| \leq \frac{1}{6}|x|\\ &\to \mathcal{O}\left(x\right)\end{aligned}$$

5. *a*) Determinar el polinomio de Taylor a tercer orden y el término de residuo correspondiente para la función $f(x) = \ln(1-x)$. Use $x_0 = 0$.
Comenzando con $f(x) = \ln(1-x)$, calculamos

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x}\,, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad f'''(x) = -\frac{2}{(1-x)^3}\,, \quad f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1-x)^4}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \ln(1) = 0 \\ f'(x_0) &= -\frac{1}{1} = -1 \\ f''(x_0) &= -\frac{2}{1^2} = -2 \\ f'''(x_0) &= -\frac{3}{1^3} = -3 \\ f^{IV}(\xi) &= -\frac{6}{(1-\xi)^4} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} f(x) &= P_3(x) + R_3(x) \\ &= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4(1-\xi)^4}x^4\,. \end{aligned}$$

b) Usando el resultado anterior, aproximar el valor de $\ln(0.25)$ y calcular el error teórico asociado a esta aproximación. Comparar el error límite teórico con el error actual.
Ahora tomamos $x = 0.75$. Usando el polinomio de Taylor y el término de residuo, encontramos

$$\ln(0.25) = f(0.75) \approx P_3(0.75) = -0.75 - \frac{1}{2}(0.75)^2 - \frac{1}{3}(0.75)^3 = -1.171875$$

Con un error absoluto dado por

$$|R_3(0.75)| = \left|\frac{-1}{4(1-\xi)^4}(0.75)^4\right|$$

donde $0 < \xi < 0.75$. Ya que ξ debe ser mayor que 0, obtenemos

$$|R_3(0.75)| < \frac{1}{4}(0.75)^4 \approx 0.079102$$

Este es el error límite teórico. La diferencia entre $P_3(0.75)$ y $\ln(0.25)$ es de 0.214419, que sigue siendo un error muy grande.

c) Calcular el siguiente límite y determinar la correspondiete tasa de convergencia.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) + x + 1/2x^2}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4(1-\xi)^4}x^4 + x + 1/2x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4(1-\xi)^4}x\right) \\ &= -\frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{\ln(1-x)+x+1/2x^2}{x^3}+\frac{1}{3}\right| &= \left|\frac{1}{4(1-\xi)^4}x\right| \leq \frac{1}{4}|x| \\ &\to \mathcal{O}\left(x\right)\end{aligned}$$

6. Escribe el algoritmo para el metódo de bisección, para encontrar soluciones de ecuaciones en una sola variable. Usa el algoritmo para encontrar las soluciones de la ecuación $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$, en los siguientes intervalos:

   a) $[0, 1]$
   b) $[1, 3.2]$
   c) $[3.2, 4]$

   (Use el método hasta que el error relativo entre aproximaciones sea menor a 10^{-2}).

   Algoritmo: Para obtener una solución a $f(x) = 0$ dada la función f continua en el intervalo $[a, b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos:

ENTRADA:	extremos a, b a
	función cuyo cero debe ser encontrada f
	parámetro de convergencia ϵ
	número máximo de iteraciones $Nmax$
PASO 1:	salvar $sfa = \text{sign}(f(a))$
PASO 2:	para i desde 1 hasta $Nmax$ hacer
PASO 3:	$p = a + (b - 2)/2$
PASO 4:	si $((b - a) < 2\epsilon)$ entonces SALIDA p
PASO 5:	salvar $sfp = \text{sign}(f(p))$
PASO 6:	si $(sfa^* sfp < 0)$ entonces
	asigne el valor de p a b
	si no
	asigne el valor de p a a
	asigne el valor de sfp a sfa
	fin
	fin
PASO 7:	SALIDA "el número máximo de iteraciones ha sido excedido"

   a) $[0, 1]$ Solución: $p_7 = 0.5859$
   b) $[1, 3.2]$ Solución $p_8 = 3.002$
   c) $[3.2, 4]$ Solución $p_9 = 3.419$