Solución:
Tarea 2. Métodos Numéricos

César Hernández Aguayo

1. Encontrar el límite y la tasa de convergencia de:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-1}{7n^2+n+2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3-1/n^2}{7+1/n+2/n^2}\\ &= \frac{3}{7}\,.\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{3n^2-1}{7n^2+n+2}-\frac{3}{7}\right| &= \left|\frac{-3n-13}{49n^2+7n+14}\right| < \frac{3}{49n}\\ &\to \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

2. Calcular el límiete cuando $x\to 0$, y comparar la tasa de convergencia de las siguientes funciones. (Tip. El parámetro ϵ de la serie de Taylor adquiere valores entre 0 y x).

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sin(x^2)}{x}\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^6\sin(\xi)/6}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}(x-x^5\sin(\xi/6))\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(x^2)}{x}-0\right| &= \left|x-x^5\sin(\xi)/6\right| \leq |x|\\ &\to \mathcal{O}\left(x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\sin(x)^2}{x}&\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)^2}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^4\sin(\xi)/3}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}(x-x^3\sin(\xi)/3)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Tasa de convergencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(x)^2}{x} - 0\right| &= \left|x - x^3\sin(\xi)/3\right| \leq |x| \\ &\rightarrow \mathcal{O}(x)\end{aligned}$$

Aunque ambas funciones tengan la misma tasa de convergencia al orden más bajo, la función $\frac{\sin(x^2)}{x}$ tiene términos de orden superior en su expansión en serie.

3. ¿Cómo se define y cómo se encuentra la multiplicidad de una raíz? ¿Qué multiplicidad tienen las raíces de las siguientes funciones? $f(x) = 3(x+1)(x-1/2)(x-1)$, $f(x) = e^x - x - 1$. Para la raíz $x_0 = 0$.

   Una raíz p de la ecuación $f(x) = 0$ se dice que es una raíz de multiplicidad m si f puede escribirse de la forma
   $$f(x) = (x-p)^m q(x)$$
   donde $\lim_{x\to p} q(x) \neq 0$. Una raíz de multiplicidad uno es llamada raíz simple.

   - $f(x) = 3(x+1)(x-1/2)(x-1) = 0$, tiene tres raíces de multiplicidad uno, en $x = -1$, $x = 1/2$ y en $x = 1$.
   - $f(x) = e^x - x - 1 = 0$, tiene una raíz en $x = 0$, para conocer su multiplicidad, calculamos
     $$f(0) = f'(0) = 0\,, \qquad f''(0) = 1 \neq 0.$$
     Entonces, la raíz $x = 0$ es de multiplicidad 2.

4. Demuestre que el número máximo de iteraciones para obtener un error absoluto entre aproximaciones de una raíz en el método de bisección es:
   $$n_{max} \leq \frac{\log\left((b-a)/\epsilon\right)}{\log(2)}$$

   Sabemos del teorema de análisis de convergencia que
   $$|p - p_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$
   donde $|p - p_n| = \epsilon$ y n es el número de iteraciones. Para conocer el número máximo de iteración, sólo hay que despejar n_{max} de la ecuación anterior.
   $$\begin{aligned}\epsilon &\leq \frac{b-a}{2^n}\,, \quad \rightarrow \quad 2^n \leq \frac{b-a}{\epsilon} \\ \log(2^n) &\leq \log((b-a)/\epsilon)\,, \quad \rightarrow \quad n_{max} \leq \frac{\log\left((b-a)/\epsilon\right)}{\log(2)}\,.\end{aligned}$$

5. Usa el método de bisección para encontrar las raíces reales de la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$. Calcular de antemano el número de iteraciones necesarias para obtener la raíz con error absoluto menor a $\epsilon = 0.001$. Resume el procedimiento en una tabla donde se indica el número de iteraciones, la aproximación obtenida y el error absoluto entre iteraciones sucesivas. Verificar que los errores obtenidos en iteraciones sucesivas se comportan como lo indica la teoría respecto al valor final aproximado de la raíz.

   Usando el algoritmo escrito en la solución de la Tarea 1 ejercicio 6. Si graficamos la función, encontramos que la función sólo tiene dos raíces.

   Para la primera raíz escogemos el intervalo $[-2, 0]$ y para la segunda escogemos el intervalo $[0, 2]$.

   Para el intervalo $[0, 2]$ encontramos que $n_{max} \leq 11$. A continuación se presenta la tabla con el número de iteraciones, la aproximación obtenida y el error absoluto entre iteraciones sucesivas.

n	p_n	ϵ_{abs}
0	1	0.5
1	1.5	0.25
2	1.25	0.125
3	1.125	0.0625
4	1.0625	0.0312
5	1.09375	0.0156
6	1.10937	7.812×10^{-3}
7	1.117185	3.906×10^{-3}
8	1.12109	1.953×10^{-3}
9	1.123045	9.765×10^{-4}

   Para el intervalo $[-2, 0]$ encontramos que $n_{max} \leq 11$. A continuación se presenta la tabla con el número de iteraciones, la aproximación obtenida y el error absoluto entre iteraciones sucesivas.

n	p_n	ϵ_{abs}
0	1	0.5
1	-0.5	0.25
2	-0.75	0.125
3	-0.875	0.0625
4	-0.9375	0.0312
5	-0.90625	0.0156
6	-0.89062	7.812×10^{-3}
7	-0.88281	3.906×10^{-3}
8	-0.87890	1.953×10^{-3}
9	-0.87695	9.765×10^{-4}

6. Para la misma función del inciso anterior, escribe 4 opciones del problema equivalente de punto fijo, y determina que opciones convergerán a la raíz en el intervalo $[0, 2]$ y cuáles a la raíz en el intervalo $[-2, 0]$. Realiza las iteraciones necesarias para encontrar las raíces de la función usando el método de punto fijo. Resume el procedimiento en una tabla donde indicas el número de iteraciones, la aproximación obtenida y el error relativo entre iteraciones sucesivas. Verificar que los errores obtenidos en iteraciones sucesivas se comportan como lo indica la teoría.

   ¿Cómo se compara la convergencia de este método con el inciso anterior?

   Las opciones de $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ serían

   a)
   $$f(x) = 0 \leftrightarrow x^4 = 3 + x - 2x^2 \leftrightarrow g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}\,,$$

   b)
   $$f(x) = 0 \leftrightarrow 2x^2 = x + 3 - x^4 \leftrightarrow g_2(x) = \left(\frac{x + 3 - x^2}{2}\right)^{1/2}\,,$$

   c)
   $$f(x) = 0 \leftrightarrow x^2(x^2 + 2) = x + 3 \leftrightarrow g_3(x) = \left(\frac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}\,,$$

   d)
   $$f(x) = 0 \leftrightarrow 4x^4 + 4x^2 - x = 3x^4 + 2x^2 + 3 \leftrightarrow g_4(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}\,,$$

7. Demostrar los puntos 1 a 3 del teorema de convergencia del método de punto fijo visto en clase. Así como que la tasa de convergencia es $\mathcal{O}(k^n)$, y que el orden de convergencia el lineal, a menos que $g'(x) = 0$ en cuyo caso la convergencia es de orden superior.

Teorema:Sea g continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ con g: $[a, b] \to [a, b]$. Además, suponga que g es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces

1) la secuencia $\{p_n\}$ generada por $p_n = g(p_{n-1})$ converge al punto fijo p para cualquier $p_0 \in [a, b]$;

2) $|p_n - p_{n-1}| \leq k^n \max(p_0 - a, b - p_0)$; y,

3) $|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$.

Demostración. 1) Para establecer la primera parte del teorema, se debe mostrar que $|p_n - p| \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cualquier valor $p_0 \in [a, b]$. Por lo tanto, sea $p_0 \in [a, b]$. Ya que g: $[a, b] \to [a, b]$, garantizamos que $p_n = g(p_{n-1})$ está bien defininda y que $p_n \in [a, b]$ para todo n. Además,

$$
\begin{aligned}
|p_n - p| &= |g(p_{n-1} - g(p))| \\
&= |g'(\xi)||p_{n-1} - p| \\
&\leq k|p_{n-1} - p| \\
&\leq k^2|p_{n-2} - p| \\
&\cdots \\
&\leq k^n|p_0 - p|\,.
\end{aligned}
$$

Ahora, ya que $k < 1$

$$
\lim_{n\to\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = |p_0 - p| \lim_{n\to\infty} k^n = 0\,.
$$

2) Combinando el límite

$$
|p_n - p| \leq k^n|p_0 - p|
$$

obtenida en la prueba de (1) con el límite

$$
|p_0 - p| \leq \max(p_0 - a, b - p_0)
$$

establece la segunda conclusión del teorema.

3) Procediendo de la misma manera que en 1), se puede mostrar que

$$
|p_{n+1} - p_n| \leq k^n|p_1 - p_0|
$$

Ahora, sea $m > n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|p_m - p_n| &= |p_m - p_{m-1} + p_{m+1} - p_{m-2} + \cdots + p_{n+1} - p_n| \\
&\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m+1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\
&\leq k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \cdots + k^n|p_1 - p_0| \\
&leq\ k^n|p_1 - p_0|(1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1})\,.
\end{aligned}
$$

En la parte 1), se establecio que $p_m \to p$ cuando $m \to \infty$, entonces

$$
|p - p_n| \leq k^n|p_1 - p_0| \sum_{i=0}^{\infty} k^i = \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|\,.
$$

donde se usó una serie geométrica para la fórmula de la sumatoria.