Solución:
Tarea 4. Métodos Numéricos

César Hernández Aguayo

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de eliminación Gaussiana, con ó sin pivoteo según se requiera. Muestra claramente las operaciones entre filas que estás realizando:

   a)

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

   Solución: $x_1 = 5/17, x_2 = -47/17, x_3 = 69/17$.

   b)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   Solución: $x_1 = 7/12, x_2 = 29/24, x_3 = 7/8$.

   c) Escribe un algoritmo de eliminación gaussiana.

   ENTRADA. número de incógnitas y ecuaciones n; matriz aumentada $A = (a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n+1$.

   SALIDA. Solución $x_1, x_2, \cdots, x_n$ o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

   Paso 1. Para $i = 1, \cdots, n-1$ haga pasos 2-4.

   Paso 2. Sea p el entero más pequeño con $i \leq p \leq n$ y $a_{pi} \neq 0$. Si no puede encontrarse un entero p entonces SALIDA (no existe solución única); PARAR.

   Paso 3. Si $p \neq 1$ entonces realice $(E_p) \leftrightarrow (E_i)$.

   Paso 4. Para $j = i+1, \cdots, n$ haga pasos 5 y 6.

   Paso 5. Tome $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$.

Paso 6. Realice $(E_j - m_{ji}E_i) \to (E_j)$;

Paso 7. Si $a_{nn} = 0$ entonces SALIDA (no existe solución única). PARAR

Paso 8. Tome $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$

Paso 9. Para $i = n-1, \cdots, 1$ tome $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j-i+1}^{n} a_{ij}x_j\right]/a_{ii}$

Paso 10. SALIDA $(x_1, \cdots, x_n)$; PARAR.

2. Considera un modelo económico simple que consiste sólo de 4 sectores: (1) agricultura, (2) energía, (3) manufactura (4) mano de obra. Obtener una producción en alguno de los sectores por lo general requiere de entradas provenientes de los 3 sectores restantes. Por ejemplo, para producir en agricultura, equipo de trabajo del sector manufactura, combustible del sector energía, y mano de obra. La relación entre los diferentes sectores se puede representar por una matriz de entrada-salida ES, donde los elementos ES_{ij} son definidos como la entrada requerida del sector i para producir una unidad de salida del sector j.

   Sea x el vector que denota la salida total en esta economía. El vector ESx nos da el total de la entrada requerida de cada sector de la economía para producir la salida x. Esta cantidad se conoce como demanda interna. Si además hay una demanda hay una demanda de consumidores externos en cada sector dada por el vector d, entonces la salida total de cada sector debe ser suficiente para cubrir tanto la demanda interna como la externa. Es decir, el vector x debe satisfacer

$$x = ESx + d \qquad \text{o bien, } Ax = d \qquad \text{con : } A = (I - ES) \tag{1}$$

   Supón que la matriz de entrada-salida de nuestra economía de 4 sectores está dada por

$$ES = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.09 & 0.09 & 0.19 \\ 0.16 & 0.15 & 0.28 & 0.21 \\ 0.19 & 0.21 & 0.22 & 0.27 \\ 0.27 & 0.04 & 0.35 & 0.02 \end{bmatrix}$$

   y que hay una demanda de consumo externa de 23 millones para agricultura, 45 millones para energía, 39 millones para manufactura, y 12 millones de mano de obra.

   Usando el método de eliminación Gaussiana, encuentra la salida necesaria de los cuatro sectores para satisfacer la demanda interna y la demanda externa.

   Primero calculamos la matriz $A = (I - ES)$

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.09 & -0.09 & -0.19 \\ -0.16 & 0.85 & -0.28 & -0.21 \\ -0.19 & -0.21 & 0.78 & -0.27 \\ -0.27 & -0.04 & -0.35 & 0.98 \end{bmatrix}$$

   Aplicando elimincación Gaussiana con sustitución hacia atrás, encontramos la salida de 64.587402653 millones para agricultura, 127.271516088 millones para energía, 128.021505317 millones para manufactura y 80.956108389 millones de mano de obra.

Calcula la matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.31 & 0.27 & 0.44 & 0.43 \\ 0.64 & 1.51 & 0.93 & 0.70 \\ 0.71 & 0.59 & 1.93 & 0.80 \\ 0.64 & 0.35 & 0.85 & 1.45 \end{bmatrix}$$

3. *a*) Resuelve el mismo problema del ejercicio anterior usando ahora el método de factorización LU.

   Encontramos las matrices L y U:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.168 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & -0.273 & 1 & 0 \\ -0.284 & -0.079 & -0.585 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.09 & -0.09 & -0.19 \\ 0 & 0.85 & -0.295 & -0.242 \\ 0 & 0 & 0.681 & -0.374 \\ 0 & 0 & 0 & 0.698 \end{bmatrix}$$

   Ahora debemos resolver los sistemas, $Ly = d$ y $Ux = y$,donde y es un vector auxiliar y x es el vector que estamos buscando. Con esto encontramos que $y = [23, 48.864, 56.94.55.702]$ y $x = [64.587402633, 127.271516144, 128.021505323, 80.956108262]$ millones, este resultado concuerda en buena precisión con el resultado encontrado en el problema anterior.

   b) ¿Cómo cambia la salida de los 4 sectores (es decir, el vector x) si duplicamos la demanda externa?,

   $x = [129.175, 254.543, 256.043, 161.912]$ millones.

   c) ¿Cómo cambia si la disminuimos a la mitad?

   $x = [32.294, 63.636, 64.011, 40.478]$ millones.

4. Usa la matriz inversa de A para dar una estimación del error en los problemas 2 y 3.a.

Usando el método de matriz inversa $x = A^{-1}d$, encontramos

$x = [64.587402652, 127.271516075, 128.021505340, 80.956108380]$ millones. Y los errores serían

Sector	E. Gaussina	LU
Agricultura	1×10^{-9}	1.9×10^{-8}
Energía	1.3×10^{-8}	6.9×10^{-8}
Manufactura	2.3×10^{-8}	1.7×10^{-8}
Mano de obra	9×10^{-9}	1.18×10^{-7}

Para este tipo de problemas, pero ahora con un modelo económico más realista, (es decir, más sectores), ¿qué método te parece más conveniente de usar?

Con ambos métodos se obtuvo la misma solución, si tenemos más sectores sería más conveniente usar el método de eliminación Gaussiana, para evitar resolver dos sistemas de ecuaciones como es el caso de despomposición LU. Además de que el error del método de eliminación Gaussiana es menor.

5. *a*) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método SOR, usando $w = 1$, tomando como valor inicial $x^{(0)} = 0$, y terminando la iteración cuando $||x^{k+1} - x^k|| < 10^{-6}$.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Solución: $x_1 = 0.9375$, $x_2 = 1.75$, $x_3 = 2.0625$

b) Implemente el método SOR en `python`, y realiza una gráfica del número de iteraciones como función del valor del parámetro w, para encontrar el valor de w óptimo.