

Tarea 1 Métodos Numéricos

Prof. Alma González

Entrega: 4 de Febrero de 2015

Esta tarea se debe resolver SOLO usando calculadora. No se requiere programar los algoritmos.

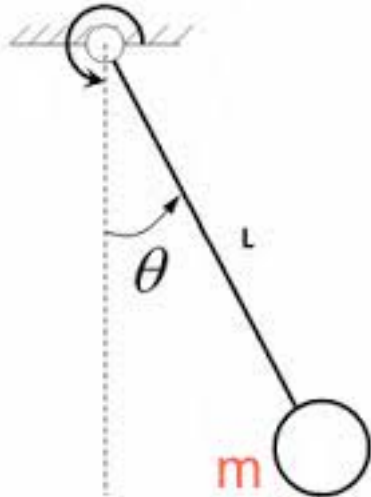
1. Demuestra que la ecuación de movimiento para un péndulo simple como el que se muestra en la figura, ignorando las fuerzas disipativas, está dado por:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \quad (1)$$

(Puedes hacerlo usando mecánica vectorial, o bien mecánica analítica.) Demuestra que si las oscilaciones del péndulo son pequeñas entonces, a primer orden, la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (2)$$

Responde: Qué tipo de errores se estarían cometiendo al usar la ecuación anterior para describir el movimiento de un péndulo simple. Qué método usarías para resolver las ecuaciones anteriores?



2. La regla del punto medio se usa para aproximar el valor de una integral definida usando la expresión

$$\int_a^b f(x) dx \approx 2h \sum_{j=1}^n f(x_j), \quad (3)$$

donde $h = (b - a)/2n$ y $x_j = a + (2j - 1)h$.

- Escribe un algoritmo para aproximar el valor de una integral definida usando la regla del punto medio.
 - Usa dicho algoritmo para aproximar el valor de $\int_1^2 dx/x$. Use $n=5$.
3. Un esquema para aproximar la raíz de un número positivo y real, a , se basa en la expresión

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n a}{3x_n^2 + a} \quad (4)$$

donde n , representa el número de iteración que se esta realizando. Nota que x_0 (i.e $n = 0$) corresponde a un valor inicial, por lo que n_1 corresponde a la primera iteración, n_2 corresponde a la segunda, etc...

- Escribe un algoritmo para aproximar la raíz cuadrada de un número positivo y real, a , usando esta expresión.
- Usa el algoritmo para $a = 4.0$, usando $x_0 = 0.1$. Realiza 2 iteraciones y calcula los errores absoluto, relativo y porcentual. Realiza mas iteraciones hasta que el error absoluto sea $\epsilon_{abs} \leq 1 * 10^{-5}$

4. Calcula los siguientes limites y determine la correspondiente tasa de convergencia.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^3+2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$

5. (a) Determinar el polinomio de Taylor de tercer orden y el término de residuo correspondiente para la función $f(x) = \ln(1-x)$. Use $x_0 = 0$.
- (b) Usando el resultado anterior, aproximar el valor de $\ln(0.25)$ y calcular el error teórico asociado a esta aproximación. Comparar el error límite teórico con el error actual.
- (c) Calcular el siguiente límite y determinar la correspondiente tasa de convergencia.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x + 1/2 x^2}{x^3} \tag{5}$$

6. Escribe el algoritmo para el método de bisección, para encontrar soluciones de ecuaciones en una sola variable. Usa el algoritmo para encontrar las soluciones de la ecuación $x^3 + -7x^2 + 14x - 6 = 0$, en los siguientes intervalos:

- a) $[0, 1]$
- b) $[1, 3.2]$
- c) $[3.2, 4]$

(Usa el método hasta que el error relativo entre aproximaciones sea menor a 10^{-2})