Tarea 2 Análisis Numérico

Prof. Alma González

Entrega: 18 de Febrero de 2015

Para los ejercicios 6 y 7 pueden hacer uso de la computadora, en cuyo caso deben transcribir el código que usaron.

1. (1 punto) Encontrar el límite, y la tasa de convergencia, de:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{7n^2+n+2}$$

2. (1 punto) Calcular el límite cuando $x \to 0$, y comparar la tasa de convergencia de las siguientes funciones. (Tip. El parámetro ϵ de la serie de Taylor adquiere valores entre 0 y x)

   $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$

   $f(x) = \frac{\sin(x)^2}{x}$

3. (1 punto) ¿Cómo se define, y cómo se encuentra, la multiplicidad de una raíz? ¿Qué multiplicidad tienen las raíces de las siguientes funciones? $f(x) = 3(x+1)(x-1/2)(x-1)$ $f(x) = \exp^x - x - 1$ para la raíz $x_0 = 0$

4. (1 punto) Demuestra que el número máximo de iteraciones para obtener un error absoluto entre aproximaciones de una raíz en el método de bisección es:

$$n_{max} \leq \frac{\log((b-a)/\epsilon)}{\log(2)}$$

5. (3 puntos) Usa el método de bisección para encontrar las raices reales de la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$. Calcular de antemano el número de iteraciones necesarias para obtener la raíz con error absoluto menor a $\epsilon = 0.001$. Resume el procedimiento en una tabla donde se indica el número de iteración, la aproximación obtenida y el error absoluto entre iteraciones sucesivas. Verificar que los errores obtenidos en iteraciones sucesivas se comportan como lo indica la teória respecto al valor final aproximado de la raíz.

6. (3 puntos) Para la misma función del inciso anterior, escribe 4 opciones del problema equivalente de punto fijo, y determina que opciones convergerán a la raíz en el intervalo $[0, 2]$ y cuáles a la raíz en el intervalo $[-2, 0]$. Realiza las iteraciones necesarias para encontrar las raices de la función usando el método de punto fijo. Resume el procedimiento en una tabla donde indicas el número de iteración, la aproximación obtenida y el error relativo entre iteraciones sucesivas. Verificar que los errores obtenidos en iteraciones sucesivas se comportan como lo indica la teoría.

   ¿Cómo se compara la convergencia de este método con el inciso anterior?

7. Extra (1 punto): Demostrar los puntos 1 a 3 del teorema de convergencia del método de punto fijo visto en clase. Así como que la tasa de convergencia es $O(k^n)$, y que el orden de convergencia es lineal, a menos que $g'(x) = 0$ en cuyo caso la convergencia es de orden superior.