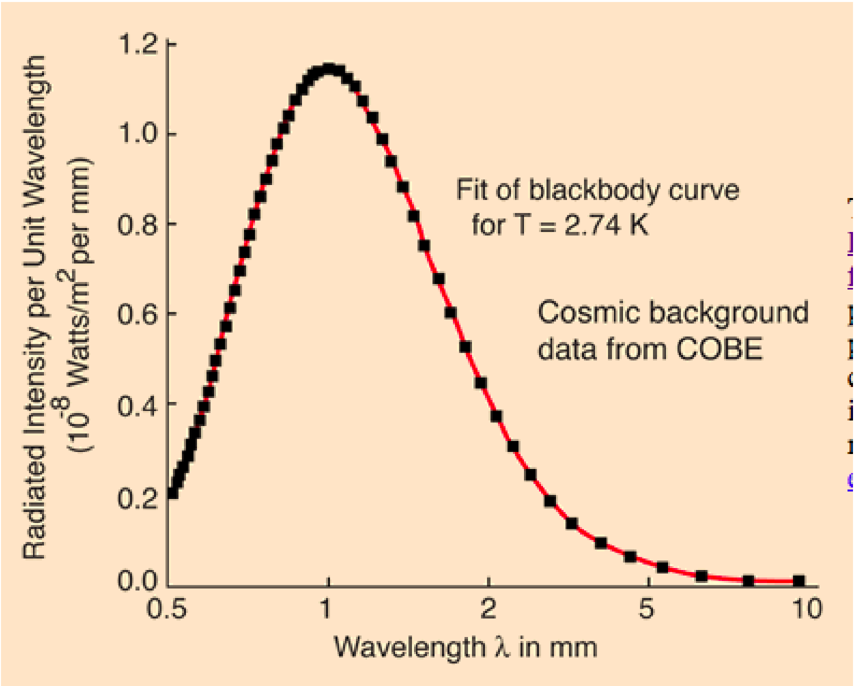
Tarea 3 Análisis Numérico

Prof. Alma González

Entrega: 2 de Marzo de 2015

1. (3.5 puntos) **Temperatura del Universo.** Se observa que la radiación cósmica del fondo de microondas sigue un espectro de cuerpo negro, con un máximo en una longitud de onda $\lambda \approx 1mm$ como se observa en la figura.



La energía emitida por un cuerpo negro por unidad de volumen por unidad de longitud de onda, está dada por:

$$\psi = \frac{8\pi ch\lambda^{-5}}{e^{\frac{ch}{\lambda k_B T}} - 1} \tag{1}$$

Donde, c,h,K_B son la velocidad de la luz, y las constantes de Planck y Boltzmann respectivamente. λ es la longitud de onda de la radiación emitida y T es la temperatura absoluta del cuerpo negro.

(a) Encuentra una expresión a partir de la que puedas calcular la longitud de onda que máximiza la energía como función de la temperatura. (Tip: puedes definir una variable adimensional $x = ch/(\lambda K_B T)$.)

(b) Encuentra al menos 2 formas de escribir la ecuación que encontraste en el apartado 1, como un problema equivalente de punto fijo (no uses el método de Newton), para las cuales puedas asegurar convergencia en el intervalo [0.5,5].

(c) De los dos problemas de punto fijo planteados en el apartado anterior usa el que menos iteraciones requiera para alcanzar una precisión menor a $\epsilon = 10^{-4}$.
(Nota: Resume las iteraciones del método de punto fijo en una tabla donde muestras el numero de aproximación, el valor aproximado, y el error absoluto respecto a la iteración anterior. Verifica que los errores consecutivos disminuyen segun lo indica el teorema de convergencia.)

(d) Con el resultado del punto anterior calcula la temperatura actual del Universo. (Revisa que las unidades sean consistentes.)

2. (2.5puntos) **Regulación térmica del cuerpo.** Stolwijk (1980) desarrolló un modelo para la regulación térmica del cuerpo humano, donde el cuerpo es representado como un segmento esférico (la cabeza), 5 segmentos cilíndricos (el tronco, 2 brazos, 2 piernas), y un compartimento central con la sangre. Un mecanismo importante para la perdida de calor es por medio de la respiración. Para aproximar la energía térmica contenida en la respiración, se usó el siguiente modelo matemático que relaciona la presión de vapor de agua expirado en la respiración, p_{H_2O} [mm Hg] con la temperatura $T[C]$ del aire inhalado:

$$p_{H2O} = \exp\left[9.214 - \frac{1049.8}{1.9858(32 + 1.8\,T)}\right] \tag{2}$$

Si se mide que la presión de el vapor de agua expirado en la respiración es 0.298 mm Hg, ¿cuál es la temperatura del gas inhalado?

(a) Usa el método de Newton para encontrar la respuesta usando como punto incial $T_0 = 15C$. Usa una precisión de $\epsilon = 10^{-2}$.

(b) Resume el procedimiento del inciso anterior en una tabla con el número de iteración, el valor apróximado, y el error absoluto entre iteraciones. Analiza el comportamiento de los errores, ¿es consistente con lo que indica la teoría?

(c) ¿Con cuántas iteraciones se encuentra la solución si se complementa el método de Newton con el método de convergencia acelerada?

3. (1 punto)**Osteoporosis en una mujer china.** Wu et al. (2013) estudió las variaciones entre la edad y la velocidad del sonido asociada en la tibia (VS), para mujeres chinas nativas. Obtivieron la siguiente relación entre la VS y la edad (medida en años):

$$\mathrm{VS} = 3383 + 39.9Y - 0.78Y^2 + 0.0039Y^3, \tag{3}$$

donde el VS está expresado en unidades de [m/s]. La VS medida para en una paciente es 3850 m/s. ¿Cuál es la edad estimada de la paciente? Usando el intervalo de 20 a 80 años usa el método que menos iteraciones requiera para encontrar la edad con precision $\epsilon = 0.1$. Justifica claramente tu elección.

4. (3 puntos) Dadas las siguientes matrices, realiza analíticamente las operaciones matriciales que se indican. Escribe las rutinas de python necesarias para para calcularlas, y verifica que funcionan correctamente. Transcribe los códigos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) 3.*B

(b) A*B

(c) C*A

(d) C*D

(e) B*C

(f) det(B)

(g) B/det(B)

(h) D/B