Tarea 4 Análisis Numérico

Prof. Alma González

Entrega: 17 de Abril de 2015

1. (2 puntos) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de eliminación Gausiana, con ó sin pivoteo según se requiera. Muestra claramente las operaciones entre filas que estás realizando. :

   (a)
   $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   (c) Escribe un algoritmo de eliminación gausiana.

2. (2.5 puntos) Considera un modelo económico simple que consiste solo de 4 sectores: (1) agricultura; (2) energía; (3) manufactura (4)mano de obra. Obtener una producción en alguno de los sectores por lo general requiere de entradas provenientes de los 3 sectores restantes. Por ejemplo, para producir en agricultura se requiere de semillas y fertilizantes del sector agricultura, equipo de trabajo del sector manufactura, combustible del sector energía, y mano de obra. La relación entre los diferentes sectores se puede representar por una matriz de entrada-salida ES, donde los elementos ES_{ij}, son definidos como la entrada requerida del sector i para producir una unidad de salida del sector j.

   Sea x el vector que denota la salida total en está economía. El vector ESx nos da el total de la entrada requiera de cada sector de la economía para producir la salida x. Está cantidad se conoce como demanda interna. Si ademas hay un demanda de consumidores externos en dada sector dada por el vector d, entonces la salida total de cada sector debe ser suficiente para cubrir tanto la demanda interna como la externa. Es decir el vector x debe satisfacer

   $$x = ESx + d \qquad \text{o bien, } Ax = d \quad \text{con:} A = (I - ES) \tag{1}$$

   Supón que la matriz de entrada-salida de nuestra economía de 4 sectores está dada por:

   $$ES = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.09 & 0.09 & 0.19 \\ 0.16 & 0.15 & 0.28 & 0.21 \\ 0.19 & 0.21 & 0.22 & 0.27 \\ 0.27 & 0.04 & 0.35 & 0.02 \end{bmatrix}$$

   y que hay una demanda de consumo externa de 23millones para agricultura, 45 millones para energía, 39 para manufactura, y 12millones de mano de obra.

   Usando el método de eliminación Gaussiana encuentra la salida necesaria de los cuatro sectores para satisfacer la demanda interna y la demanda externa.

   Calcula la matriz inversa de A (muestra explicitamente tu calculo).

3. (2 puntos)

   (a) Resuelve el mismo problema del inciso anterior usando ahora el método de factorización LU.

   (b) ¿Cómo cambia la salida de los 4 sectores (i.e. el vector x) si duplicamos la demanda externa?,

   (c) ¿Cómo cambia si la disminuimos a la mitad?

4. (1.5 puntos) Usa la matriz inversa de A para dar una estimación del error en los problemas 3 y 4.1.

   Para esté tipo de problemas, pero ahora con un modelo económico más realista (i.e. más sectores), que método te parece más conveniente de usar? Justifica tu respuesta.

5. (2 puntos)

   (a) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando el método SOR, usando $w = 1$, tomando como vector inicial $x^{(0)} = 0$, y terminando la iteración cuando $||x^{k+1} - x^k|| < 10^{-6}$.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

   (b) Implementa el método SOR en python, y realiza una gráfica del numero de iteraciones como función del valor del parámetro w, para encontrar el valor de w optimo.

6. Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales y dada la factorización $A = D - L - U$ (D es una matriz diagonal, L es una matriz triangular inferior con ceros en la diagonal, y U es una matriz triangular superior con ceros en la diagonal),

   - (Método Jacobi) Demuestra que con la separación $M = D$ y $N = L + U$ es posible plantear el problema de búsqueda de punto fijo

$$x^{k+1} = Tx^k + c \tag{2}$$

     donde $T = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b$ y que la componente $i-$esima del vector x^{k+1} se puede escribir como:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

   - (Método Gauss-Seidel) Demuestra que con la separación $M = D - L$ y $N = U$ la componente $i-$esima del vector x^{k+1} esta dada por:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{A_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j^{(k)} \right]$$