

Modelos SIR modificados para la evolución del COVID-19

Nana Cabo Bizet

DataLab, Dpto. de Física
División de Ciencias e Ingenierías
Universidad de Guanajuato.

Seminario de Sistemas Complejos y Física estadística
Instituto de Física de la UNAM.

29 de junio de 2020

Presentación basada en: [<https://arxiv.org/abs/2004.11352>, Cabo Bizet, Cabo Montes de Oca, 20].

Mencionaremos aspectos de [<https://arxiv.org/abs/2006.12479>, Cabo Bizet, Damián, Mayorga Peña, 20].

- 1 Introducción
- 2 El Modelo SIR
- 3 Región lineal de las ecuaciones del SIR
- 4 Alemania con $\beta(t)$
- 5 Cuba con $\beta(t)$
- 6 Evolución de México con $\beta(t)$
- 7 Comparación con un modelo de población efectiva
- 8 Trabajo del grupo de la UG
- 9 Conclusiones

Estudiamos el modelo epidemiológico SIR (Susceptibles, Infectados, Recuperados) con tasa de contagio variable para la evolución del COVID-19.

Se considera que la razón k entre el número de infectados activos observados y el número total de infectados es menor que la unidad. La población total se considera la población del país N .

Se formula un modelo semi-empírico para la dinámica del parámetro de contagio $\beta(t)$ en que este parámetro tiende a cero debido al aislamiento, después del tiempo de duración media de la enfermedad, en que ha decrecido el número de infectados en las familias confinadas.

El análisis logra describir apropiadamente la curva de infección de Alemania con una dependencia lineal. El mismo modelo se aplica a predecir una curva de infección para Cuba con una dependencia exponencial.

Se estudia un modelo SIR con la tasa de contagio $\beta(t)$ a pedazos, por intervalos de tiempo. Se ajustan los datos de Cuba, Alemania y Corea Sur. La evolución de Cuba suponiendo una cuarentena estricta predice el pico de infectados.

El máximo deseado de la curva de infectados del SIR no es el máximo estándar con β constante, sino uno obtenido debido a la cuarentena y una β variable en el tiempo cuando se logra $R_0(t) = \beta(t)/\gamma < 1$. Para todos los países que han salido de la epidemia estos máximos se encuentran en la región en que las ecuaciones SIR son lineales.

Esta tasa de contagio dependiente del tiempo con dependencia exponencial y a pedazos se emplea para estimar la evolución futura del COVID-19 en México, realizando estimaciones con un intervalo de confianza del 95%. En este análisis se incorporan los muertos como una fracción de la población R del SIR.

Se han realizado muchos trabajos en modelos matemáticos para describir la evolución del COVID-19 en México, algunos de ellos son: [CIMAT,UNAM,Sec.Salud.,IMSS,COANCyT,20] [ConCiencia,20] [Gob.CDMX,20] [de la Peña,20] [Marroquín,20][Capistrán, Capella y Christen,20] [Acuña-Zegarra et al,20] [Miramontes,20] [Shiller,20] [Gu,20] [Bernal,Delepine,20] [Morales,Urena,20] [UG DATA LAB,20][Barranco,Bernal,20][Niz,20]

El modelo SIR [Kermack,McKendrick,1927] se describe de la siguiente forma:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (3)$$

Las funciones del tiempo S, I, R denotan susceptibles, infectados y recuperados se consideran como fracción de la población N . Las unidades son $[\beta] = [\gamma] = 1/T$ y $[S] = [I] = [R] = 1$, T denota a la unidad de tiempo. Las condiciones iniciales se escriben como:

$$S(0) = 1 - i - r, \quad I(0) = i \quad \text{and} \quad R(0) = r, \quad (4)$$

donde i, r son la fracción inicial de infectados y recuperados.

Existe una tasa de detección k , que varía de un país a otro y que denota cual es la proporción de casos detectados sobre el total de casos existentes, esta detección parcial aplica para infectados activos y recuperados [Li et al., Science 2020][Moriarty et al,20].

Los datos de infectados activos y recuperados detectados $\mathcal{I}(t)$, $\mathcal{R}(t)$ se obtuvieron en términos de los infectados y recuperados reales $\mathcal{I}_{TOT}(t)$, $\mathcal{R}_{TOT}(t)$ para resolver las ecuaciones asumiendo una tasa de detección $k = 0.14$:

$$\mathcal{I}(t) = k\mathcal{I}_{TOT}(t), \quad \mathcal{R}(t) = k\mathcal{R}_{TOT}(t). \quad (5)$$

Sin embargo en nuestros resultados veremos que esta tasa no es relevante en el régimen considerado.

Las ecuaciones diferenciales que resolvemos son las del SIR para las poblaciones reales:

$$\frac{dS_{TOT}}{dt} = \beta S_{TOT} I_{TOT}, \quad (6)$$

$$\frac{dI_{TOT}}{dt} = (\beta S_{TOT} - \gamma) I_{TOT}, \quad (7)$$

$$\frac{dR_{TOT}}{dt} = \gamma I_{TOT}, \quad (8)$$

Con condiciones iniciales:

$$I_{TOT}(0) = \frac{l_0}{kN}, \quad R_{TOT}(0) = \frac{R_0}{kN}, \quad S_{TOT}(0) = 1 - \frac{l_0 + R_0}{kN},$$

a tiempo $t = 0$ donde hay l_0 personas infectadas detectadas, y R_0 personas recuperadas detectadas.

Región lineal de las ecuaciones del SIR

Las soluciones de (8) en el **régimen lineal**, con N grande se reducen a soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} S_{TOT} &\approx 1, \frac{d\mathcal{I}_{TOT}}{dt} = (\beta - \gamma)\mathcal{I}_{TOT}, \quad \frac{d\mathcal{R}_{TOT}}{dt} = \gamma\mathcal{I}_{TOT} \quad (9) \\ \mathcal{I}_{TOT}(0) &= \frac{I_0}{kN}, \quad \mathcal{R}_{TOT}(0) = \frac{R_0}{kN}, \quad S_{TOT}(0) \approx 1. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones al ser lineales se pueden re-escalar sus condiciones iniciales, obteniéndose soluciones. Por lo cual se puede obtener una ecuación para las poblaciones observadas:

$$\begin{aligned} S &\approx 1, \frac{d\mathcal{I}}{dt} = (\beta - \gamma)\mathcal{I}, \quad \frac{d\mathcal{R}}{dt} = \gamma\mathcal{I}, \\ \mathcal{I}(0) &= \frac{I_0}{N}, \quad \mathcal{R}(0) = \frac{R_0}{N}, \quad S(0) \approx 1. \quad (10) \end{aligned}$$

Esto implica que en este régimen la evolución de las poblaciones detectadas tiene una **independencia de la tasa de detección y de la población total N** .

Por lo tanto en el régimen lineal, las soluciones son exponenciales locales en el tiempo. Las poblaciones detectadas de recuperados e infectados pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}NI &= I_0 \exp((\beta - \gamma)t), \\NR &= (R_0 - \delta) \exp((\beta - \gamma)t) + \delta, \\ &= \frac{\gamma I_0}{\beta - \gamma} \exp((\beta - \gamma)t) + \delta.\end{aligned}\tag{11}$$

En nuestro trabajo estimamos la tasa de recuperación de cada país γ , y esta se considera como un parámetro constante deducida del ajuste de la dependencia lineal $\frac{dR}{dt}$ versus \mathcal{I} in (10).

Hay cierta universalidad en estos valores, sin embargo hay diferencias entre los distintos países, que pudieran reflejar el hecho de que los datos se toman de distinta manera.

Estimamos los valores locales de $\beta(t)$ de dos formulas diferentes las cuales son válidas en el régimen lineal.

La primera de estas emplea los datos de infectados acumulados:

$$\beta(t) = \frac{(\mathcal{I}(t) + \mathcal{R}(t))'}{(\mathcal{I}(t) + \mathcal{R}(t))} + \gamma. \quad (12)$$

La segunda emplea los datos de los casos de infectados activos:

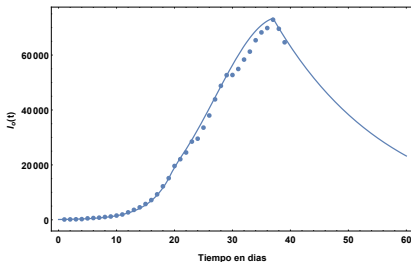
$$\beta(t) = \frac{\mathcal{I}(t)'}{\mathcal{I}(t)} + \gamma. \quad (13)$$

La primera posee menos oscilaciones en los datos que la segunda. La primera es sólo válida en la región $R_0 > 1$.

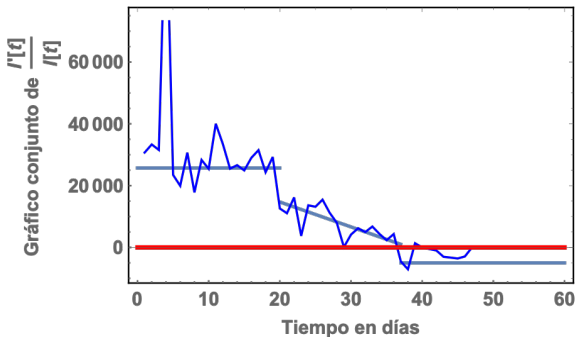
Alemania con $\beta(t)$

Se resolvieron las ecuaciones SIR (línea azul clara) all inicio hasta un tiempo de 20 días (desde 20.03.20). La solución exponencial reproduce los datos (puntos azules).

A partir del día de aislamiento (20.03.20) el modelo asume que β disminuye bruscamente y después decrece, durante $\tau = 17$ días de tiempo medio de duración de la enfermedad. Al final de ese intervalo β se anula. La solución para el modelo se acerca a las observaciones.



El factor de crecimiento exponencial $\frac{I'}{I} = \beta - \gamma$ aproxima la relación entre el número diario de infectados detectados del modelo (azul clara) y el número total observado (línea azul oscura). La línea roja representa el punto donde comienza el decrecimiento de los infectados activos.



El aislamiento en Alemania se puede aproximar al caso ideal en el que cada persona fue aislada por completo.

Tras un tiempo de duración media de la afección, casi todos los infectados leves (mayoría) estuvieron sanos después de ese intervalo de tiempo. Por ello, la transmisión sería nula ya que ellos están aislados y por tanto β debe anularse.

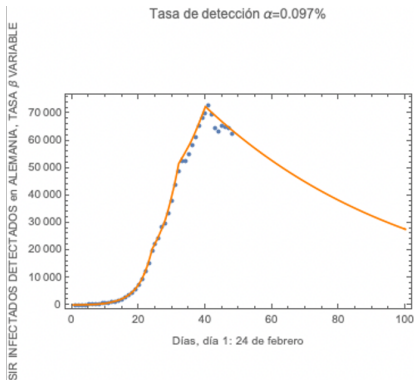
Se ajustan en la primera etapa los valores de tasa de contagio $\beta = 0.21$, y tasa de recuperación $\gamma = 0.066$ (línea azul en la Fig.1).

Sin embargo, en la mayoría de los países, no existen condiciones similares de aislamiento. Los enfermos no observados pueden infectar a su familia, no cabe esperar que β se anule al final del intervalo medio de duración de la enfermedad a partir del aislamiento.

Alemania con $\beta(t)$

Realizamos un estudio de la tasa de contagio β para varios países comparando con las observaciones. Para determinar los β s locales en el tiempo se realiza un ajuste local de la curva de activos \mathcal{I} a una exponencial.

Aplicado al caso de Alemania el comportamiento se corresponde con el observado en el modelo semi-empírico.

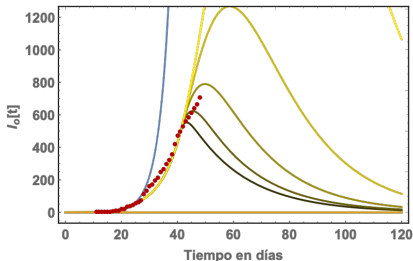


Períodos	$\gamma(\tilde{R}_0 - 1)$	$\tilde{\beta}$	\tilde{R}_0
(1): 26.02.20 al 29.02.20	0.583043	$5.25552 * 10^7$	12.6609
(2): 29.02.20 al 04.03.20	0.32193	$3.08777 * 10^7$	7.43861,
(3): 04.03.20 al 08.03.20	0.324113	$3.10589 * 10^7$	7.48226
(4): 08.03.20- al 12.03.20	0.242933	$2.43193 * 10^7$	5.85866
(5): 12.03.20- al 16.03.20	0.241112	$2.41682 * 10^7$	5.82225
(6): 16.03.20- al 20.03.20	0.249774	$2.48873 * 10^7$	5.99549
(7): 20.03.20- al 24.03.20	0.10755	$1.30798 * 10^7$	3.15101
(8): 24.03.20- al 28.03.20	0.127047	$1.46985 * 10^7$	3.54094
(9): 28.03.20- al 01.04.20	0.0400058	$7.47228 * 10^6$	1.80012
(10): 01.04.20- al 05.04.20	0.04677	$8.03384 * 10^6$	1.9354
(11): 05.04.20- al 14.04.20	-0.0161831	$2.80747 * 10^6$	0.676337

Cuba con $\beta(t)$, confinamiento no ideal

Del 24.03.20 se consideró una disminución brusca de β y luego se asumió un decaimiento exponencial en el tiempo. Las curvas en Fig.1 se organizan en tonalidades de verde más oscura (mayor decaimiento) a verde más clara (menos decaimiento).

Estas predicen máximos los días: 43 (12.04.20, $\alpha = 0.6$, verde más oscura), el día 45 (14.04.20 $\alpha = 0.3$), el día 50 (14.04.20 $\alpha = 0.15$) y el día 60 (29.04.20).



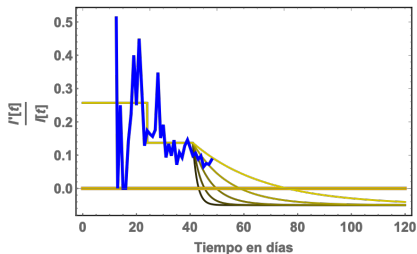
El nuevo valor se consideró actuando durante el tiempo τ . Tras ese período (el día 41: 10 de Abril), se asumieron decaimientos exponenciales en el tiempo.

Este procedimiento considera la no anulación instantánea de β dada por no existir aislamiento perfecto.

Cuba con $\beta(t)$, confinamiento no ideal

Las distintas curvas se organizan en tonalidades de verde más oscura (mayor decaimiento) a verde más clara (menos decaimiento).

Estas predicen máximos los días: 43 (12 de abril, $\alpha = 0.6$, verde más oscura,), el día 45 (14 de Abril $\alpha = 0.3$), el día 50 (19 de Abril $\alpha = 0.15$).

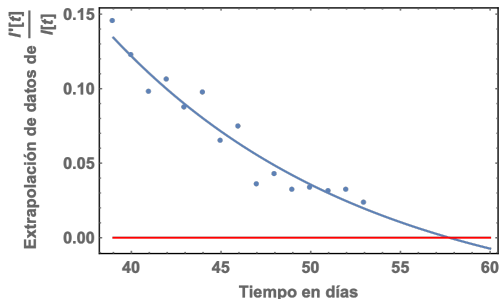


En la figura se muestra $I(t)$ para $\beta = \exp[\alpha(t(24 + \tau))]$.

La línea azul muestra los datos observados. La curva azul sugiere que el máximo el día 60 (29 de Abril, $\alpha = 0.075$) con número de casos alrededor de los 1200.

Cuba con $\beta(t)$, confinamiento no ideal

Dada una mejora en las mediciones en Cuba, considerando la magnitud I'/I (sólo sintomáticos) se hizo un nuevo ajuste exponencial, que estimó el pico al final de abril de 2020. Esto coincide cualitativamente con la descripción anterior. Día 55: 27.04.20.

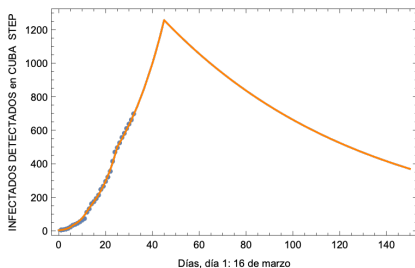


El máximo alcanzado se corresponde con uno debido a $\beta - \gamma < 0$ ($R_0 < 1$). Este es un máximo en la región donde el número de susceptibles es del orden de la población $\mathcal{S} \approx 1$, y no se corresponde al máximo estándar del SIR.

Tasa de contagio a pedazos

Para determinar los β s locales en el tiempo realizó un ajuste local de la curva de activos \mathcal{I} de Cuba a la solución localmente exponencial.

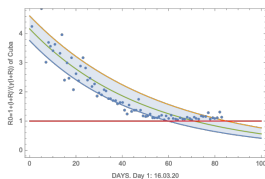
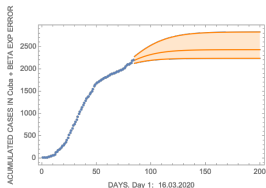
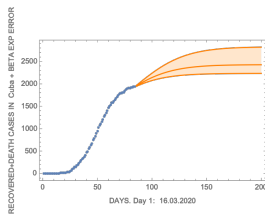
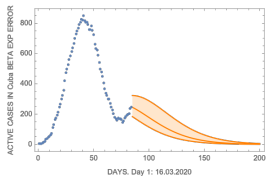
Asumiendo una tasa constante con la misma tendencia de decrecimiento presentada, para Cuba el pico se estimó a finales de abril rondando los mil infectados.



Períodos	$\gamma(\tilde{R}_0 - 1)$	β^*	\tilde{R}_0
I: 16.03.20 al 21.03.20	0.38313	0.43313	8.66261
II: 22.03.20 al 28.03.20	0.207859	0.257859	5.15717
III: 29.03.20 al 9.04.20	0.105325	0.155325	3.10649
IV: 10.04.20 al 16.04.20(o en adelante)	0.0460772	0.0960772	1.92154
V: 30.04.20- en adelante	-0.0115691	0.0384309	0.768618

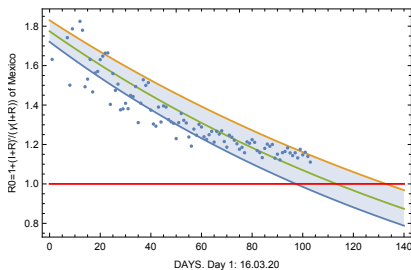
Tasa de contagio a pedazos

Hemos continuado monitoreando la evolución de la pandemia en Cuba. Empleando un ajuste exponencial para β e incorporando errores se estimó la segunda caída de la curva de activos dentro de rangos de error. Los datos son hasta el día 7.06.20.



Evolución de México con $\beta(t)$

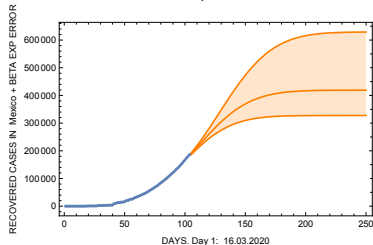
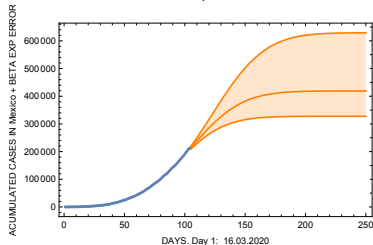
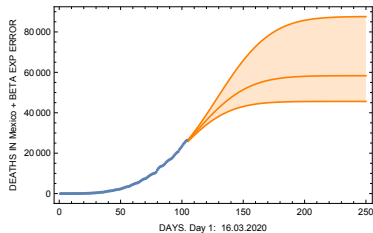
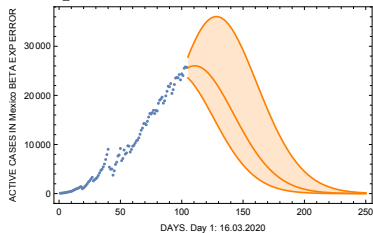
Con los datos actuales para México al día 27.06.20 realizando un ajuste de $\beta(t) = \frac{(I+R)'}{(I+R)} + \gamma$ exponencial estimamos:



- 418961(327526-629371) muertes.
- 519389 (40603-78023) casos acumulados.
- El pico de infectados activos el día 28.06.20 (21.06.20-3.07.20)
- Tasa de recuperación:
 $\gamma = 0.16 \pm 0.01$.
- Tasa de recuperación efectiva:
 $\gamma_{eff} = 0.19 \pm 0.01$.
- Tasa de mortalidad
 $\mu = 0.1387 \pm 0.0005$.

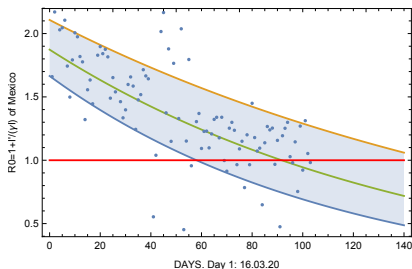
Evolución de México con $\beta(t)$

En las figuras se representan las **poblaciones detectadas**: infectados activos, muertos, acumulados y recuperados en función del tiempo.



Evolución de México con $\beta(t)$

Con los datos actuales para México al día 27.06.20 realizando un ajuste de $\beta(t) = \frac{T'}{T} + \gamma$ exponencial estimamos:



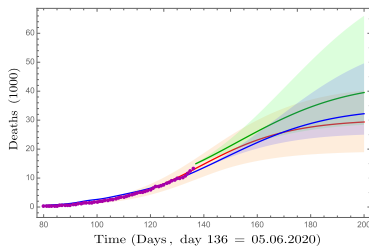
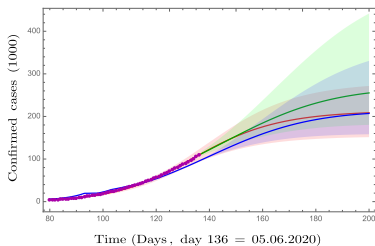
- 43936(36729, 61143) muertes.
- 354413 (296198,493206) los casos acumulados.
- El pico de infectados activos el día 27.06.20 (26.06.20-16.07.20).

Comparación con un modelo de población efectiva

En [Cabo Bizet, Mayor Peña,20] exploramos la correspondencia entre un modelo SIR global con población efectiva y el modelo SIR con $\beta(t)$ y población N grande.

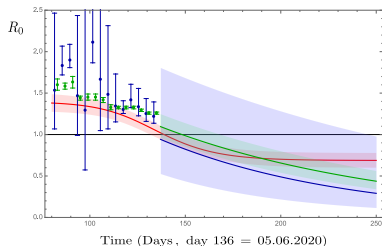
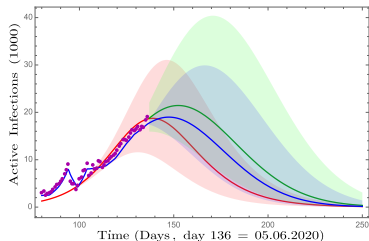
Las curvas rojas corresponden al modelo SIR independiente del tiempo. Las curvas verdes al modelo SIR model con $\beta(t) = (\gamma + \frac{\mathcal{I}'}{\mathcal{I}})$ a pedazos y exponencial. Curvas azules se corresponden al modelo con $\beta(t) = (\gamma + \frac{(\mathcal{I}+\mathcal{R})'}{(\mathcal{I}+\mathcal{R})})$ exponencial. Los errores se dan con un 95% de confianza.

Confirmados y muertos en función del tiempo para México con datos al 05.06.2020.



Comparación con un modelo de población efectiva

Casos activos y R_0 en función del tiempo para México con datos al 05.06.2020.



En los últimos meses un colectivo del Laboratorio de Datos, División de Ciencias e Ingenierías, Universidad de Guanajuato hemos estado trabajando en realizar modelos para el COVID-19 en México y en Guanajuato. Fuimos apoyados por la Dirección de apoyo a la Investigación y el Posgrado, UG.

Forman parte los investigadores: Juan Barranco, Argelia Bernal, Alma González, Damián Mayorga, Gustavo Niz, Luis Ureña, Miguel Sabido.

Hemos tratado distintos modelos y ya hemos convergido en resultados. Puede consultarse el trabajo en: <http://fisica.ugto.mx/~datalab/covidreportemex26jun20/>

Se estudia la dinámica de la tasa de contagio del modelo SIR mediante 2 descripciones. La 1ra constituye un modelo empírico en el cual se considera que desde el confinamiento, la tasa de contagio decrece tendiendo después de un período de duración de la enfermedad ($1/\gamma$). Se aplica al caso de Alemania y al de Cuba. El 2do es un modelo SIR con tasa de contagio variable, la cual se ajusta a los datos y se aplica a Alemania, Cuba y Corea del Sur.

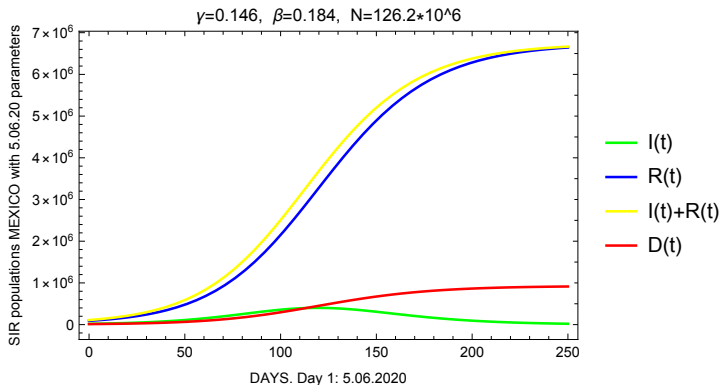
Se emplean descripciones mixtas, realizando ajustes de Cuba en distintos intervalos de tiempo. Las descripciones estudiadas coinciden para el caso cubano, y permitieron estimar que la epidemia se controlaría a finales de Abril (28-30 Abril) dadas las medidas de aislamiento (24.03.20), se estimó que los infectados activos en el pico rondarían los 1000.

Ambos métodos se aplican al desarrollo de la epidemia en México, incluyendo muertos en la población \mathcal{R} , realizando ajustes e incluyendo intervalos de confianza.

Para todos los países considerados se estimó la tasa de recuperación obteniéndose cierta universalidad $\gamma \approx 0.06$. En México este valor difiere bastante del resto de los ejemplos considerados.

Para el modelo SIR con población del orden del país es indispensable considerar una β variable en el tiempo, puesto que de otro modo el máximo alcanzado sería del orden de la población del país (millones). El máximo de infectados activos que queremos es el alcanzado cuando $R_0(t) < 1$ es decir cuando $\beta(t) = \gamma$.

Mostremos un ejemplo sencillo de esta última conclusión:



Soluciones numéricas para el SIR con población de México, tasa de contagio local el día 5.06.20 $\beta = 0.184$, tasa de recuperación $\gamma = 0.146$ y mortalidad $\mu = 0.138$ en el intervalo 16.03.20 to 5.06.20. Tasa de detección $k = 0.14$. Casos activos $I(t)$ (verde), recuperados $R(t)$ (azul), acumulados $C(t)$ (amarillo) y muertes $D(t)$ (rojo). Este escenario pesimista no esperamos alcanzarlo si β continua su misma tendencia.

Gracias