Geometria diferencial I

Dr. David Delépine [1]

Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque, N 103
Col. Lomas del Campestre
CP-37150 Léon, Gto

Enero 1, 2005

[1]email: delepine@fisica.ugto.mx; tel: ext. 8424

Contenido

Capitulo 1

Introducción

Este curso de geometría diferencial es ante todo una introducción al tema de la geometría diferencial. Este curso, de primera intención, esta dedicado a estudiantes en física en el cual tratamos de dar las nociones esenciales de geometría diferencial sin insistir sobre las demostraciones no-necesarias a la comprensión de los teoremas o definiciones. Ponemos mucho mas enfasis sobre como aplicar esos conceptos en lgar de demostrarlos de manera formal. De este punto de vista, insistimos sobre los ejercicios presentados en el ultimo capítulo. Esos ejercicios son muy importante para dar una comprensión completa y intuitiva de los conceptos introducidos durante el curso.

Podriamos empezar el curso directamente hablando de variedades diferenciales de dimension arbitraria. Pero con el fin de dar una comprensión intuitiva de las principales nociones de geometría diferencial, estudiamos esas nociones con ejemplos concretos facilmente visualizables. Por eso, el curso se dividio en 3 partes de tamaño practicamente igual.

En el primer capitulo, estudiamos como definir las curvas (dimensión uno) en el plano afin o/y euclidiano. En la primera parte de este capitulo, recordamos los principales nociones de geometría que van a ser necesarias para entender este curso. Introducimos las nociones de curvatura, vector tangente, vector normal, coordenadas curvilineas, envolvente de una familia de curvas, torsión, etc.... Ilustramos cada una de esas definiciones con varios ejemplos.

En el capitulo dos, generalizamos esas definiciones al caso de superficies e introducimos nociones suplementarias tales que primera forma fundamental, área de una superficie, segunda forma fundamental, ...

En el tercer capitulo, damos una introducción a la geometría riemaniana. Nos limitamos al caso de dos dimensiones pero este tratamiento es completamente general y puede generalizarse sin ningun problema al caso de 4- o de n dimensiones como usualmente es necesario cuando trabajamos en gravitación o cosmología.

Queremos atraer la atención de los lectores para no limitarse a estas notas. En la bibliografia, damos otras fuentes de información sobre este tema. Como lo mencionamos anterioramente, este curso es un curso introductorio a la geometría diferencial que tiene como objetivo principal de dar los conceptos para poder entender cualquier libro o referencia sobre este tema. No vamos a tener tiempo a dentro de este curso de aplicar esos conceptos a problemas de física concretos. Por eso, recomendamos para entender los conceptos citados e introducidos en estas notas y para ir mas alla de estas notas buscar otros puntos de vista presentes en la literatura sobre geometría diferencial.

Esas notas se inspiraron de los cursos de geometría (MATH1126) impartido por el Prof. Pascal Dupont y de geometría diferencial impartido por el Prof. Yves Felix de la Universidad Catolica Lovaina (Belgica).

Quiero particularmente dar mis agradecimientos al Dr. Jose Socorro que me ayudo a corrigir y mejorar estas notas.

Capitulo 2

Curvas

2.1 Introducción

En el curso de álgebra, la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo fue introducida de manera extensiva. La estructura del espacio vectorial nos permite hacer de la geometría y también en el vocabulario del álgebra lineal se puede notar sus similaridades con el vocabulario de la geometría (usamos los terminos de puntos, lineas, planos,...). Además, una vez que escogimos una base, tenemos varios métodos de calculo del álgebra lineal como el calculo matricial, etc. Pero la noción de espacio vectorial no es suficiente en geometría por una razon muy sencilla: en un espacio vectorial hay un vector priviligiado: el vector nulo. Al contrario, cuando hablamos del plano del espacio tridimensional de la geometría clasica de Euclide, no hay ningun punto priviligiado. Este problema puede ilustrarse también estudiando las aplicaciones que preserven la estructura de espacio vectorial. Las aplicaciones que preserven la estructura del espacio vectorial son las aplicaciones lineales. Pero cuando queremos hacer de la geometría una de las primeras aplicaciones lo más simple es una translación, pero esta aplicación no es lineal ya que no deja fijo el vector nulo. Por eso en geometría tenemos que definir una noción de espacio mas general que la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo. Esta noción es la nocion de **espacio afin**. La definición de un espacio afin sobre un cuerpo conmutativo fijo K se define como :

1. Un espacio afin sobre K (o un Kespacio afin) es un tripleté $E = \left(\mathcal{E}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{(--)}\right)$ donde

(i) $\mathcal{E}$ es un conjunto no vacio.

(ii) $\overrightarrow{E}$ es un espacio vectorial de dimensión finita o infinita sobre K

(iii) $\overrightarrow{(--)}$ es una aplicación de $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \overrightarrow{E}$

Además tienen que satisfacer los siguientes dos axiomas:
$\forall p, q, r \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ (relación de Chasles).
$\forall p \in \mathcal{E}, \forall v \in \overrightarrow{E}, \exists! q \in \mathcal{E}$ tal que $\overrightarrow{pq} = v$

Un R-espacio afin se llama espacio afin real y un C-espacio afin es un espacio afin complejo. Los elementos de $\mathcal{E}$ se llaman puntos, y los elementos de $\overrightarrow{E}$ se llaman vectores. Vamos a decir que $\overrightarrow{pq}$ es un vector de origen p y de extremidad q.

La noción de espacio afin nos permite estudiar un número de propiedades geometricas (por ejemplo, la noción de paralelismo, de paralelogramo). Pero, no es suficiente si queremos por ejemplo distinguir entre un rectángulo o un cuadrado. Eso nos lleva a introducir la noción de **espacio euclidiano**. Un espacio euclidiano es un espacio afin con un producto escalar definido sobre su dirección ($\overrightarrow{E}$). En lo que sigue, repetiremos varias definiciones y nociones que por lo general fueron definidas o introducidas en un curso de álgebra lineal.

1. Sea V un R-espacio vectorial. El **producto escalar** sobre V es una aplicación bilineal, simetrica, positiva y definida. Eso significa que el producto escalar $(-|-)$ es una aplicación definida como sigue:

$$(-|-) : V \times V \to R$$

y tiene que satisfacer las siguientes condiciones:

(i) $\forall u, v, w \in V, \forall \alpha, \beta \in R$,

$$(\alpha u + \beta w | v) = \alpha(u|v) + \beta(w|v) \tag{2.1}$$
$$(v|\alpha u + \beta w) = \alpha(v|u) + \beta(v|w) \tag{2.2}$$

(ii) $\forall u, v \in V$,

$$(u|v) = (v|u) \tag{2.3}$$

(iii) $\forall u \in V$

$$(u|u) \geq 0 \tag{2.4}$$

(iv) $\forall u \in V$,

$$(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0 \tag{2.5}$$

1. Un espacio afin euclidiano es un doblete $(E, (-|-))$ donde E es un espacio afin y $(-|-)$ es un producto escalar sobre $\overrightarrow{E}$.

   Una norma sobre un espacio vectorial euclidiano V es un aplicación:

$$\|-\| : V \to R$$

   tal que

1. $\forall u \in V, \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$

2. $\forall u \in V, ((\forall \alpha \in R), \|\alpha u\| = \|u\| \,.\, |\alpha|$
3. $\forall u, v \in V, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Un espacio vectorial con una definición de norma se llama **espacio vectorial normado**. En el caso de un espacio euclidiano, tenemos automaticamente una noción de norma derivada del producto escalar:

$$\|u\| = \sqrt{(u|u)}$$

Se puede verificar muy facilmente que esta definición satisface los requisitos para ser una norma. Se puede probar que una norma se deriva de un producto escalar si satisface la identidad del paralelogramo, a saber,

$$\forall u, v \in V, \|u + v\| + \|u - v\| = 2\,(\|u\| + \|v\|)$$

1. **Desigualdad de Schwarz**: en un espacio vectorial euclidiano V, $\forall u, v \in V$, tenemos
$$|(u|v)| \leq \|u\| \,.\, \|v\|$$

   Ángulo entre dos vectores: sean dos vectores u, v no-nulos en un espacio vectorial euclidiano. Usando la desigualdad de Schwarz, tenemos

$$-1 \leq \frac{(u|v)}{\|u\| \,.\, \|v\|} \leq 1$$

   Entonces, existe un y un único ángulo positivo θ tal que

$$\cos\theta = \frac{(u|v)}{\|u\| \,.\, \|v\|}$$

   Este ángulo único es llamado el ángulo entre los dos vectores u, v.

   Desigualdad de Minkowski: $\forall u, v \in V$, V un espacio vectorial euclidiano, tenemos
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$
   y además, se tiene la igualdad si y solamente si u y v son paralelos de misma dirección.

   Una **distancia** sobre un conjunto E es una aplicación:

$$d : E^2 \to R$$

   que satisface las siguientes condiciones:

(i) $\forall p, q \in E$, $d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$

(ii) $\forall p, q \in E$, $d(p, q) = d(q, p)$

(iii) $\forall p, q, s \in E$, $d(p, q) + d(q, s) \geq d(p, s)$

Un espacio con una definición de distancia es llamado un **espacio métrico**. Un espacio afin normado tiene automaticamente una noción de distancia derivada de la definición de la norma:

$$d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\|$$

1. Sea $e = (e_1, ..., e_n)$ una base de un espacio vectorial euclidiano V, sea $u \in V$. En lugar de caracterizar u por sus coordenadas en la base e,

$$_e u = \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$$

tal que

$$u = \sum_{k=1}^{n} u^k e_k$$

es posible de caracterizar el vector u por los n reales:

$$u_k = (e_k|u)$$

que vamos a llamar las **coordenadas covariantes** de u en la base e. Para ilustar la diferencia entre coordenadas y coordenadas covariantes, es suficiente tomar el caso que la base e no es normalizada. En tal caso, si cambiamos el $i-$esimo vector de base: $e'_i = k.e_i$ $(k \neq 0)$, la coordenada correspondiente es dividida por k $(u'^i = u^i/k)$ y la coordenada covariante es multiplicada por k $(u'_i = k.u_i)$. De manera general, tenemos

$$\begin{aligned} u_k &= (e_k|u) = (e_k|\sum_{j=1}^{n} u^j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (e_k|e_j) u^j \\ &= \sum_{j=1}^{n} g_{kj} u^j \end{aligned}$$

Ahora, vamos a definir la **orientación de un espacio**. Primero vamos a recordar la definición de un **anillo ordenado**. Un anillo ordenado es un anillo $(A, +)$ con una parte P de A tal que

1. $\{P, \{0\}, -P\}$ son una partición de A.
2. $\forall a, b \in A$, $a + b \in P$
3. $\forall a, b \in A$, $ab \in P$

Podemos definir una relación de orden sobre A diciendo que

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P \cup \{0\}$$

Asi por ejemplo, Z es un anillo ordenado (tomar $P = N^* \equiv N \setminus \{0\}$). Por otro lado, no es posible de ordenar C.

Sea $u = (u_1, u_2, ..., u_p)$ una lista de vectores linealmente independientes y $v = (v_1, .., v_p)$ una lista de mismo tamaño en el subespacio generado por la lista u. Como u es una base en este sub-espacio, podemos construir la siguiente matriz:

$$M = ({}_u v_1 ... {}_u v_p)$$

donde ${}_u v_1$ es la expresión del vector v_1 en la base u. Vamos a decir que **los vectores v tiene la misma orientación que u**

$$\det M \geq 0$$

Si v es también una familia libre, entonces v es también una base de este sub-espacio generado por u y M es la matriz de cambio de bases. En este caso, u tiene la misma orientación que v si y solamente si v tiene misma orientación que u si y solamente si $\det M > 0$. Si $\det M > 0$, vamos a decir que u y v tienen misma orientación. Si $\det M < 0$, vamos a decir que u y v tienen orientación opuesta. Por ejemplo, la base (e_2, e_3, e_1) tiene la misma orientación que la base (e_1, e_2, e_3). Pero, (e_2, e_1, e_3) pertenece a la orientación opuesta. Asi es facil de convencerse que la relación "tener la misma orientación" entre familia libre es una equivalencia que tiene solamente dos clases de equivalencia.

Definición:

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado K y φ un isomorfismo lineal de V en V. Vamos a decir que φ es directo si $\det \varphi > 0$ *y que es inverso si* $\det \varphi < 0$

Propuesta 1:

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado K, φ es un isomorfismo lineal de V en V y e una base de V. Las bases e y $\varphi(e)$ son de misma orientación si φ es directo y son de orientación opuesta, si φ es inverso.

La elección de una de las dos clases de equivalencia por la relación tener la misma orientación entre bases es **una orientación del espacio vectorial.** Las bases que pertenecen a la orientación selecta son llamadas **bases directas** y las otras bases son llamadas **no-directas o "retrogradas".** Para cualquier entero n, la orientación canónica de K^n es la orientación en la cual la base canónica es directa y denotamos por $A^n_+(K)$ el espacio $A^n(K)$ con la orientación canónica.

Primero, hay que notar que la elección de un orientación sobre un espacio afin no induce una orientación sobre los sub-espacios. Ahora vamos a introducir una noción de orientación de un espacio vectorial mas cerca de la geometría diferencial:

Definición:

Sea e y g dos bases de un espacio vectorial real V de dimensión n, vamos a decir que g es homotopico a e si existe una aplicación continua

$$f : [0,1] \to V^n : t \to (f_1(t), .., f_n(t))$$

tal que

1. $\forall t \in [0,1]$, $f(t)$ *es una base de* V.
2. $f(0) = e$ *y* $f(1) = g$

Hay que ver esta aplicación f como una deformación continua transformando poco a poco e en g.

Propuesta 2: La relacion de homotopia entre bases es una equivalencia.

Demostración:

- la relación es reflexivo: toda base e es homotopica a ella misma.
- Es simetrica: si g es homotopica a e, entonces, e es homotopica a g. De hecho, para demostrarlo, es suficiente de usar la aplicación f^* definida como
$$f^* : [0,1] \to V^n : t \to f^*(t) = f(1-t)$$
f^* es una aplicación continua de $[0,1]$ tal que $f^*(0) = g$, $f^*(1) = e$.
- Es transitiva: Si g es homotopica a e y si k es homotopica a g, entonces, k es homotopico a e. Por eso, si $f(t)$ y $h(t)$ son los dos funciones aue definen respectivamente la homotopia entre g e e y entre g y k ($f(0) = e, f(1) = g, h(0) = g, h(1) = k$), entonces,
$$F : [0,1] \to V^n : t \to F(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, 1/2] \\ h(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$
es una aplicaciùon continua tal que $F(0) = e$ y $F(1) = k$.

Propuesta 3: Sea e una base de un espacio vectorial real V de dimensión n y sea i, j dos enteros tales que $1 \leq i < j \leq n$.

1. *la base* $e^* = (e_1, ..., e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, .., e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, ..e_n)$ *es homotopica a* e.
2. *la base* $e^{**} = (e_1, ..., e_{i-1}, -e_i, e_{i+1}, ...e_{j-1}, -e_j, e_{j+1}, ...e_n)$ *es homotopica a* e.

Demostración: (indicación: usar $f(t) = (1-t)e + te^*$).

Propuesta 4: Sea e una base de un espacio vectorial real V de dimensión n. Sea H un hiperplan suplementaria al sub-espacio engendrado por e_n y sea p la proyección sobre H paralelamente al sub-espacio generado por e_n. Con esas condiciones, tenemos que la base e^* definida como

$$e^* = (p(e_1), ...p(e_{n-1}), e_n)$$

es una base de V, homotopica a e.

Propuesta 5: *Dos bases de un espacio vectorial real son de misma orientación si y solamente si son homotopicas.*

De manera intuitiva, para transformar de manera continua una base $e = (e_1, ...e_{n-1}, e_n)$ en una base $e^* = (e_1, ...e_{n-1}, -e_n)$ de orientación opuesta, necesitamos a un momento que el ultimo vector pasa por el hiperplan generado por los otros vectores de base. A este momento, la familia no es una base y entonces, e y e^* no son homotopicas.

Definición: *una referencia cartesiana o sencillamente una referencia de un espacio afin es un par $\mathcal{R} = (O, e)$ donde O es un punto de $\mathcal{E}$ llamado el origin de la referencia y $e = (e_1, .., e_m)$ es una base de $\overrightarrow{E}$.*

Ejemplos:

- Sea K un cuerpo y $n \in N$, la referencia canónica de $A^n(K)$ es

$$\mathcal{R}_c^{(n)} = ((0,0,..,0)\,;(1,0,..,0)\,,(0,1,0,..,0),..,(0,0,..,1))$$

Definición: *Si V es un espacio vectorial euclidiano orientado de dimensión n, el producto mixto de los vectores $u_1, u_2..u_n \in V$ es el real*

$$[u_1, u_2, ..u_n] = \det({}_eu_1\ {}_eu_2....{}_eu_n)$$

donde e es una base ortonormal directa de V.

Sea $u = (u_1...u_k)$ una lista de vectores en un espacio vectorial euclidiano V de dimensión n. Vamos a llamar **el determinant de Gram** de esta lista el real que vamos a notar $Gram(u)$ o $Gram(u_1, ..., u_k)$:

$$Gram(u) \equiv \det \begin{pmatrix} (u_1|u_1) & \cdots & (u_1|u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (u_k|u_1) & \cdots & (u_k|u_k) \end{pmatrix}$$

Una consecuencia de esta definición es que si tenemos una lista de vectores $(u_1, ..., u_{n-1})$ en un espacio vectorial euclidiano orientado V de dimensión n :

$$Gram(u_1, ..., u_{n-1}) = \|u_1 \wedge ... \wedge u_{n-1}\|^2$$

2.2 Definición de una curva

Una de las caracteristicas de la geometría es probablemente que las definiciones nunca son completamente satisfaciendo. El termino de "curva" tiene varios sentidos dependiendo del contexto. Por ejemplo, en el caso de las conicas, las curvas correspondientes son definidas por el uso de una ecuación de este tipo:

$$P(x, y) = 0$$

donde P es un polinomios de grado 2. Un tal ecuación es dicha **ecuación implicita de la curva.** El estudio de las curvas a partir de una ecuacion implicita es posible y es importante, en particular cuando la ecuación es polinomial: este metodo de estudio es priviligiado en el caso de la geometría álgebraica. Pero en el caso de la geometría diferencial, la idea al inicio del estudio de las curvas es que una curva es una deformación de la linea de los reales o de un intervalo de la linea de los reales. En otro termino, una curva va a ser una aplicación

$$f : I \to \mathcal{E}$$

donde I es un intervalo de R, acotado o no y $\mathcal{E}$ es el espacio donde quieremos trabajar. Es interesante de notar que eso se acerca de un otra intuición que nos viene de la cinematica, a saber que en tal caso, una curva es vista como la trayectoria de un punto material en movimiento. Este metodo de estudio de las curvas va también a aparecer en los terminos usandos en las definiciones de la geometría diferencial. Por eso, los argumento de las funciones f son muchas veces notado con la letra $t, t^{'}, t_0$ etc... y usualmente se llamo el tiempo.

2.2.1 Preliminares analiticos.

Como nuestro programa es de poner el calculo diferencial y el calculo integral al servicio de la geometría, es necesario de hacer un seria de recuerdos y precisar unos definiciones. Esas revisiones son el objeto de esta primera sección.

Lema 1:

Sea V y W dos espacios vectoriales reales, $\|-\|_W$ una norma sobre W y $f : V \to W$ un monomorfismo lineal. La aplicación

$$\|-\|_V : V \to R : v \to \|v\|_V \equiv \|f(v)\|_W$$

es una norma sobre V.

Tenemos que asegurarnos que los axiomas de la norma son satisfechos:

- Sea $v \in V$ tal que $\|v\|_V = 0$ es decir aue $\|f(v)\|_W = 0$, lo que significa que $f(v) = 0$ en W y como f es un monomorfismo, $v = 0$.
- Sea $v \in V$ y $r \in R$, entonces, $\|rv\|_V = \|f(rv)\|_W = \|rf(v)\|_W = |r| . \|f(v)\|_W = |r| . \|v\|_V$
- Sea $u, v \in V$ Entonces, $\|u + v\|_V = \|f(u + v)\|_W = \|f(u) + f(v)\|_W \leq \|f(u)\|_W + \|f(v)\|_W = \|u\|_V + \|v\|_V$

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n. La elección de una base e de este espacio nos da un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\alpha_E : V \to R^{n\times 1} : v \to_e v$$

Usando el lema anterior podemos definir una norma $\|-\|_e$ sobre V diciendo para cualquier vector v que tenemos la siguiente relación:

$$\|v\|_e = \|_e v\|$$

donde $\|-\|$ es la norma euclidiana definida sobre $R^{n\times 1}$. Usamos la biyección α_E para transferir la norma de $R^{n\times 1}$ sobre V. Pero a dos bases e y $e^{'}$ es asociado una constante $k_{ee'}$ tal que

$$(\forall v \in V) \quad \|v\|_e \leq k_{ee'} \|v\|_{e'}$$

Sea,

$$S \equiv \left\{u \in R^{n\times 1} : \|u\| = 1\right\}$$

es la esfera unidad quien es cerrada y acotada. Consideramos la función:

$$v : R^{n\times 1} \to R : \begin{cases} 0 \to 0 \\ u \to \frac{\left\|_{e'}(I)_e . u\right\|}{\|u\|} \quad (u \neq 0) \end{cases}$$

Esta función es continua sobre S y entonces en virtude del teorema de los limites alcanzados, existe u_0 y $u_1 \in S$ tal que

$$v(u_0) \leq v(u) \leq v(u_1)$$

De hecho solo la desigualdad de la derecha nos interesa y es verdadera para cualquier u no-cero y no solamente para $u \in S$ por que si $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} v(u) &= \frac{\|u\| . \left\|_{e'}(I)_e . \frac{u}{\|u\|}\right\|}{\|u\|} \\ &= \left\|_{e'}(I)_e . \frac{u}{\|u\|}\right\| \\ &= v(\frac{u}{\|u\|}) \\ &\leq v(u_1) \end{aligned}$$

por que $\frac{u}{\|u\|} \in S$.

Entonces si $v \in V$,

$$\begin{aligned} \frac{\|v\|_e}{\|v\|_{e'}} &= \frac{\|_e v\|}{\|_{e'} v\|} \\ &= \frac{\|_e(I)_{e'} \cdot_{e'} v\|}{\|_{e'} v\|} \\ &= v(_{e'} v) \\ &\leq v(u_1) \end{aligned}$$

de tal manera que tenemos

$$\|v\|_e \leq v(u_1). \|v\|_{e'}$$

es suficiente de escoger $k_{ee'} \equiv v(u_1)$.

En general, los diferentes normas "importadas" no son identicas, son solamente equivalente. Es decir que no determinan las mismas nociones metricas (por ejemplo, un triángulo puede ser equilateral o rectángulo en una sin serlo en una otra). Pero la equivalencia significa que determinan la misma topologia, es decir por lo que nos interesa ahora, la misma noción de limite.

Limites

Podemos ahora introducir la noción de limite de una función a valores en un espacio afin.

$\boxed{\text{Definición}}$:

Sea E un espacio afin real, f una función de R en $\mathcal{E}$, $a \in R$ y $P \in \mathcal{E}$. Vamos a decir que P es limite de f en a si a es adherente al dom f y si $\lim_a \left\| \overrightarrow{Pf(a)} \right\|_e = 0$ *donde e es una base cualquiera de $\overrightarrow{E}$ y donde*

$$\left\| \overrightarrow{Pf} \right\|_e : dom\ f \to R : t \to \left\| \overrightarrow{Pf(t)} \right\|_e$$

De los consideraciones anteriores, la elección de la base que se usa en esta definición es indiferente. Es claro que el limite cuando existe es único. La notaremos $\lim_a f$.

El resultado siguiente es muy util:

$\boxed{\text{Proposicion:}}$

Sea E un espacio afin real,f una función de $R \to \mathcal{E}$, $a \in R, P \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{R}$ una referencia de E. Notamos f^i las coordenadas de f en $\mathcal{R}$ y p^i los coordenadas de P. Notamos también ${}_{\mathcal{R}}f$ la función compuesta:

$${}_{\mathcal{R}}(-) \circ f : dom\ f \to R^{n\times 1}$$

Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\lim_a f = P$
2. $\lim_a ({}_{\mathcal{R}}f) = {}_{\mathcal{R}}P$
3. *Para cada i,* $\lim_a f^i = p^i$

<u>Demostración:</u>

Los limites de $R^{n\times 1}$ se calculan componente por componente, asi la equivalencia entre 2 y 3 es clara.

Vamos probar ahora la equivalencia de 1 y 2. Sea e la base contenida en $\mathcal{R}$; podemos explicitar la definición usando la base:

$$\begin{aligned}
\lim_a f &= P \Leftrightarrow \lim_a \left\| \overrightarrow{Pf} \right\|_e = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_a \left\| {}_e\overrightarrow{Pf} \right\| = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_a \| {}_{\mathcal{R}}f - {}_{\mathcal{R}}P \| = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_a ({}_{\mathcal{R}}f) = {}_{\mathcal{R}}P
\end{aligned}$$

Derivación.

Sabemos que si I es un intervalo abierto de R y $f : I \to R$ una función a valores reales, para cualquier $t \in I$,

$$f^{'}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

si este limite existe. Sea ahora E un espacio afin real: como definir la derivada de una función $f : I \to \mathcal{E}$? Si t y Δt son elementos de I , $f(t)$ y $f(t + \Delta t)$ son puntos de E: como hacer la diferencia y como dividir esta por el escalar Δt? La solución es de replazar esta diferencia por el vector $\overrightarrow{f(t)f(t + \Delta t)}$, entonces, despues de hacer eso, es posible de multiplicar esto vector por $1/\Delta t$. Obtenemos asi una función de R en $\overrightarrow{E}$:

$$\Delta t \to \frac{1}{\Delta t} \overrightarrow{f(t)f(t + \Delta t)},$$

como R y $\overrightarrow{E}$ son equipados de una norma, hay un sentido de tomar el limite en 0 de esta función: si este limite existe, la tomamos como valor en t de la derivada de f :

$$f^{'}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \overrightarrow{f(t)f(t + \Delta t)}$$

El precio a pagar con esta definición es que la derivada asi definida toma sus valores no en $\mathcal{E}$ pero en $\overrightarrow{E}$.

Es posible de iterar esta definición para obtener la derivada segunda? La respuesta es si por que el espacio vectorial $\overrightarrow{E}$ puede ser visto como un espacio afin sobre el mismo. Recuerdamos que $f : I \to \mathcal{E}$ es dicha de clase C^k si $f, f^{'}, f^{''}, ...f^{(k)}$ existen y son continuas.

Producto escalar, producto mixto y producto vecotrial de funciones.

Sea V un espacio vectorial euclidiano (orientado) de dimensión n; los diversos productos definidos sobre V determinan productos analogos sobre las funciones a valores en V, construida punto por punto. La norma de tal función se definen igualemente punto por punto:

Definición:
Sea V un espacio vectorial euclidiano (orientado) de dimensión n:

1. Sea f, g de R en V, el producto escalar de esas dos funciones es

$$(f|g) : dom\ f \cap dom\ g \to R : t \to (f|g)(t) \equiv (f(t)|g(t))$$

2. Sea f de R en V: la norma de esta función es

$$\|f\| : dom\ f \to R : t \to \|f\|(t) \equiv \|f(t)\|$$

3. Sea $f_1, ...f_n$ de R en V, el producto mixto de esas n funciones es

$$[f_1..f_n] : dom\ f_1 \cap .. \cap dom\ f_n \to R$$
$$t \to [f_1..f_n]\,(t) \equiv [f_1(t)...f_n(t)]$$

4. Sea $f_1..f_{n-1}$ de R en V, el producto vectorial de esas $n-1$ funciones es

$$f_1 \wedge .. \wedge f_{n-1} : dom\ f_1 \cap .. \cap dom\ f_{n-1} \to R :$$
$$t \to (f_1 \wedge .. \wedge f_{n-1})\,(t) \equiv f_1(t) \wedge .. \wedge f_{n-1}(t)$$

Cuando dos funciones f y g , definidas sobre el mismo dominio, tienen un producto escalar nulo, vamos a decir que esas dos funciones son ortogonales y lo notamos $f \perp g$.

Proposición:

Sea V un espacio vectorial euclidiano (orientado) de dimensión n y I un intervalo de R, tenemos

1. Si f, g son derivables, entonces, el producto escalar $(f|g)$ es derivable y igual a
$$(f|g)^{'} = (f^{'}|g) + (f|g^{'})$$

2. Si f es derivable y no se anula, entonces, tenemos que $\|f\|$ es derivable y
$$\|f\|^{'} = \frac{(f|f^{'})}{\|f\|}$$

3. Si $f_1, ..f_n$ son derivables, entonces $[f_1..f_n]$ es derivable y igual a
$$[f_1..f_n]^{'} = \sum_{1 \leq j \leq n} \left[f_1..f_j^{'}...f_n\right]$$

4. Si $f_1..f_{n-1}$ son derivables, entonces, $f_1 \wedge .. \wedge f_{n-1}$ es derivable y tenemos
$$(f_1 \wedge .. \wedge f_{n-1})^{'} = \sum_{1 \leq j \leq n} f_1 \wedge .. \wedge f_j^{'} \wedge .. \wedge f_{n-1}$$

Consecuencias:

- Sea V un espacio vectorial euclidiano, I un intervalo abierto de R y $f : I \to V$ una función derivable. La función f y su derivada $f^{'}$ son ortogonales si y solamente si la norma de f es una función constante.

- Sea V un espacio vectorial euclidiano de dimensión n, I un intervalo abierto de R y $f_1, .., f_n : I \to V$ funciones derivables. Suponemos ademas que para cualquier $t \in I$, $(f_1(t), ...f_n(t))$ sea una base ortonormal y notamos $M : I \to R^{n \times n}$ la función a valores matriciales tal que, para cualquier t,tenemos
$$(f_1(t), ...f_n(t))^{'} = (f_1(t), ..., f_n(t)).M(t)$$
En estas condiciones, $\forall t \in I$, $M(t)$ es una matriz antisimetrica.

Primitivación

Sea E un espacio afin real y I un intervalo de R. Si f y φ:$I \rightarrow \overrightarrow{E}$ son dos funciones tal que $\varphi^{'} = f$, vamos a decir que φ es una primitiva de f y en esto caso, para cualquier vector $u \in \overrightarrow{E}$,

$$u + \varphi : I \rightarrow \overrightarrow{E} : t \rightarrow u + \varphi(t)$$

es todavia una primitiva de f. Pero al lado de las primitivas vectoriales,f admite primitiva puntuales y ellas son las funciones:

$$P + \varphi : I \rightarrow \mathcal{E} : t \rightarrow P + \varphi(t)$$

para $P \in \mathcal{E}$.

Si $a, b \in I$ y si f es continua sobre $[a, b]$, el integral $\int_a^b f$ es igual a

$$[\varphi]_a^b \equiv \varphi(b) - \varphi(a)$$

para cualquier primitiva vectorial φ de f, pero tambin tenemos

$$[F]_a^b \equiv \overrightarrow{F(a)F(b)}$$

para cualquier primitiva puntual F de f.

2.2.2 Elaboración de una definición de curva.

Tenemos una vaga idea que una curva en E deberia ser una función:

$$f : I \rightarrow \mathcal{E}$$

donde I es un intervalo abierto no-vacio de R.

Un primer defecto de esta tentativa de definición de curva es que esta demasiado amplia. De hecho, segun ella, cualquier parte de $\mathcal{E}$ seria una curva. En efecto, la elección de una referencia en E le pone en biyección con R^n donde n es la dimensión de E. Y para cualquier parte $P \subseteq R^n$, hay una suryección:

$$f : R \rightarrow P$$

con R y R^n tienen mismo cardinal.

La intuiciòn cinematica nos lleva a exigir que f tiene que ser continua: un punto movil no se mueve por saltos pero si se mueve de una posición a otra, el punto movil va a pasar por todas las posiciones intermediarias. Si ponemos en nuestra definición esta exigencia de continuidad, podemos evitar los problemas que mencionamos ci arriba? La respuesta es no por que Peano dio al fin del XXiesimo siglo un ejemplo de función continua $f : [0, 1] \rightarrow R^2$ tal que su imagen sea un cuadrado. Pero el problema es que el cuadrado es de dimensión 2 y que para nosotros una curva tiene que ser de dimensión 1.

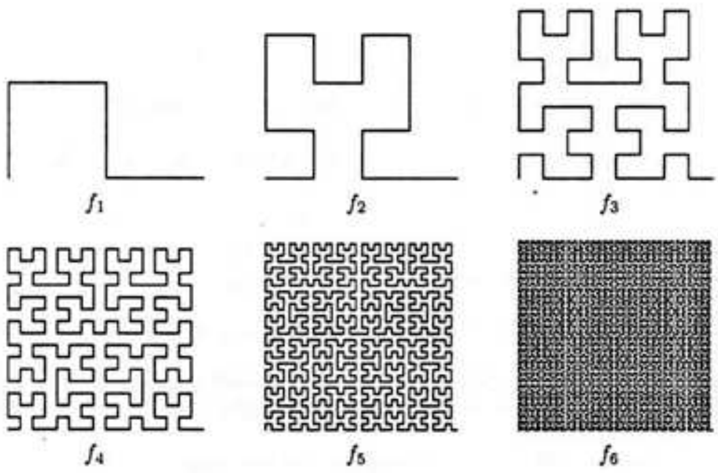

Figura 2.1: Ejemplo de Peano

Este ejemplo nos es dado por una función del siguiente tipo. Primero, definimos

$$\begin{array}{rcl} f_1 & : & [0,1] \to R^2 : \\ t & \to & f_1(t) \equiv \left\{ \begin{array}{cc} (0,2t) & 0 \le t \le 1/4 \\ (2t-1/2, 1/2) & 1/4 < t \le 1/2 \\ (1/2, 3/2-2t) & 1/2 < t \le 3/4 \\ (2t-1, 0) & 3/4 < t \le 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Definimos despues

$$\begin{array}{rcl} f_2 & : & [0,1] \to R^2 : \\ t & \to & f_2(t) \equiv \left\{ \begin{array}{cc} (4t,0) & 0 \le t \le 1/16 \\ (1/4, 4t-1/4) & 1/16 < t \le 1/8 \\ .... & \end{array} \right. \end{array}$$

Y asi de seguida, y finalmente definimos

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

Es posible de demostrar que la succesión $(f_n)_{n \in N}$ converge uniformemente sobre $[0,1]$; como cada f_n es continua, f es continua también. Ademas, f tiene como imagen $[0,1]^2$ pero no es inyectiva.

Podemos notar también que una aplicación constante:

$$f : I \to \mathcal{E}$$

Figura 2.2:

es continua pero su imagen es constituida de un solo punto. Este vez, es demasiado pequeño: su dimensión es cero.

La solución para eliminar esas dos patologias es de exigir que la función f no solamente sea continua pero inyectiva también. Pero esta exigencia de inyectividad es fuerte y adveces demasiado fuerte para numeras aplicaciones. Por ejemplo, esta condición no es satisfecha para la función:

$$f : R \to R^2 : t \to (\cos t, \sin t)$$

aunque tenemos muchas ganas de poder decir que esta función describo el circulo unidad en $E^2(R)$. Vamos a poder salvar esta definición de curva exigiendo solamente **inyectividad local**. Tecnicamente, vamos a distinguir curvas y arcos, una curva se obtiene "pegando" arcos. Pero todavia subsiste un problema. Tenemos ganas de decir, por ejemplo, en $A^n(R)$:

$$\begin{aligned} f &: R \to R^n : t \to (t, 0, 0, .., 0) \\ g &: R \to R^n : t \to (t^3, 0, 0, .., 0) \end{aligned}$$

que esas dos funciones f y g representan el eje Ox_1. Pero esas dos funciones son diferentes. Del punto de vista cinematico, son dos movimiento diferentes pero dos trayectorias identicas. La pregunta es de saber que cuenta: la trayectoria o la función? Por ejemplo, no tenemos ganas de decir que h y k :$]0,1[\to R^2$ descrita por la figura 2 son dos curvas identicas aunque im h=im k.

La solución a este problema pasa por la noción de **cambio de parametros**: la función

$$\varphi : R \to R : t \to t^3$$

es una biyección continua tal que $g = f \circ \varphi$, lo que nos conduce a decir que las curvas descritas por f y g son iguales pero no existe una biyección continua $\psi :]0,1[\to]0,1[$ tal que $k = h \circ \psi$.

Asi vamos a identificar f y g, es decir que podemos sumergirlos en la misma clase de equivalencia por que existe entre ellas dos un cambio de parametros.

Ahora, podemos pasar a nuestras definiciones. Sea E un espacio afin real y $k \in N \cup \{\infty\}$.

Definición 1:
Sea U, V *dos abiertos de* R*. Una aplicación* $\varphi : U \to V$ *es un cambio de parametros de clase* C^k *o un difeomorfismo de clase* C^k *si* φ *es biyectiva y si* φ *y* φ^{-1} *son de clase* C^k*.*

Definición 2:
Una representación parametrica de un arco de clase C^k *en* E *es una aplicación* $f : I \to \mathcal{E}$*, inyectiva y de clase* C^k*, en cual* I *es un intervalo abierto no-vacio de* R*.*

Definición 3:
Sea $f : I \to \mathcal{E}$ *y* $g : U \to \mathcal{E}$ *dos representaciones parametricas de arcos de clase* C^k*. Vamos a decir que* f *es equivalente a* g *en clase* C^k *si existe un difeomorfismo de clase* C^k*,*$\varphi : I \to U$ *tal que* $f = g \circ \varphi$*.*

Esta relación de equivalencia en clase C^k es manifestamiente reflejiva, simetrica y transitiva. Esas propiedades justifican el termino de equivalencia que usemos en la definición. Asi, ahora vamos a poder considerar las clases determinadas por esta relación de equivalencia.

Definición 4:
Un arco de clase C^k *en* E *es una clase de equivalencia de representaciones parametricas de arcos de clase* C^k *en* E*, para esta noción de equivalencia en clase* C^k*.*

Definición 5:
Una representación parametrica de una curva de clase C^k *en* E *es una aplicación* $f : U \to \mathcal{E}$ *donde* U *es un abierto no-vacio de* R*, tal que para cada punto* $t \in U$*, existe un intervalo abierto* I_t *tal que* $t \in I_t \subseteq U$ *y tal que* $f|_{I_t}$ *sea una representación parametrica de arco de clase* C^k*.*

Definición 6:
Sea $f : I \to \mathcal{E}$ *y* $g : U \to \mathcal{E}$ *dos representaciones parametricas de curvas de clase* C^k*. Vamos a decir que* f *es equivalente a* g *en clase* C^k *si existe un difeomorfismo de clase* C^k*,*$\varphi : I \to U$ *tal que* $f = g \circ \varphi$*.*

Definición 7:
Una curva de clase C^k *en* E *es una clase de equivalencia de representaciones parametricas de curvas de clase* C^k *en* E*, para esta relación de equivalencia .*

Podemos resumir esas definiciones de la siguiente manera:

- la noción de representación parametrica de un arco es la versión "local" de la noción "global" de representación parametrica de una curva.
- una representación parametrica puede ser perciba como la descripción del movimiento de un movil puntual y presenta un caracter "cinematico" que disaparece completamene por su aspecto geometrico cuando hacemos el cociente usando las clases de equivalencia que nos conduce a las nociones de arcos y curvas.

Definición 8:

El soporte de una curva es la imagen de cualquier de sus representaciones parametricas.

$\boxed{\text{Definición 9:}}$

Un punto P de la curva C representada por $f : U \to \mathcal{E}$ es dicho n-uple si existe exactamente n valores $t_1 ..., t_n \in U$ tales que $f(t_1) = ... = f(t_n) = P$. Si $\{t \in U : f(t) = P\}$ es infinito, P es dicho de orden infinito.

Asi, una curva es un arco si y solamente si todos sus puntos son sencillos.

Notas:

1. Toda representaciùon parametrica de clase C^k es también una representación parametrica de clase $C^{k'}$ con $k' \leq k$.
2. Una representación parametrica de arco de clase C^k es también una representación parametrica de curva de clase C^k, el inverso no es cierto.
3. Para que $f : I \to \mathcal{E}$ sea inyectiva, una condición suficiente es que una de sus componentes, en una referencia escogida, sea inyectiva. Esta condición no es necesaria.
4. Como una representación parametrica de arco es continua y definida sobre un intervalo, es decir una parte conexa de R, su imagen es también conexa. Entonces, todo soporte de arco es conexo, es decir de "una sola parte".
5. Si f y g son dos representaciones parametricas de arcos equivalentes, el difeomorfismo φ tal que $f = g \circ \varphi$ es único como f y g son inyectivas.
6. La mayoria de las nociones que vamos a introducir son nociones locales por lascuales la noción de arcos es suficiente. Necesitamos la noción de curvas cuando vamos a estudiar noción de naturaleza global (por ejemplo, la noción de longitud)

Ejemplos

1. Sea
$$f : R^* \to R^2 : t \to (t, \frac{1}{t})$$
es una representación parametrica de curva de clase C^∞. Su soporte es la hiperbola (figura (2.3))
$$H = \left\{(x, y) \in R^2 : xy = 1\right\}$$
Como este soporte no es conexo (hay un ramo en el primer cuadrante y un otro en el tercero), es imposible de representar este hiperbola como un arco.
2. la función $f : R \to R^2 : t \to (0, t^2)$ no es una representación de curva. De hecho, en cualquier intervalo abierto I conteniendo 0, existe dos reales opuestos a y $-a$, entonces f_I no es inyectiva.

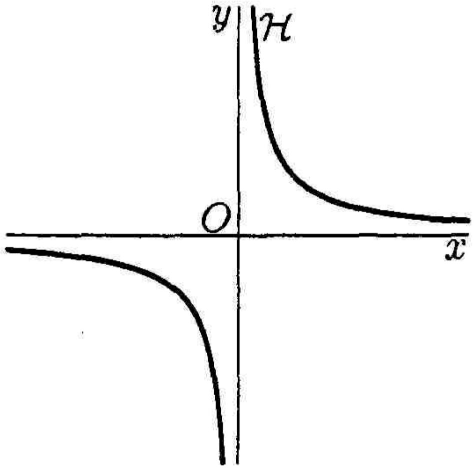

Figura 2.3:

3. Sea
$$f : R \to R^2 : t \to (\cos t, \sin t)$$
es una representación parametrica de curva de clase C^∞. Su soporte es el circulo unidad. Aqui también, es imposible de representar este circulo como un arco por que las exigencias de inyectividad y de definición sobre un intervalo abierto no pueden ser satisfecha simultanemente. Notamos que todos los puntos de esta curva son de orden infinito.

4. Sea
$$f : R \to R^2 : t \to (t^2 + t, t^2 - t)$$
es una representación parametrica de arco, de clase C^∞. Pero ninguna de los dos componentes de f es inyectiva. La aplicación f representa la parabola de ecuación: $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$.

5. Las funciones
$$f : R \to R^n : t \to (t, 0, 0, .., 0)$$
$$g : R \to R^n : t \to (t^3, 0, 0, .., 0)$$
son dos representaciones parametricas de arcos de clase C^∞. Como
$$\varphi : R \to R : t \to t^{1/3}$$
$$\varphi^{-1} : R \to R : t \to t^3$$
son dos biyecciones continua tal que $f = g \circ \varphi$. f y g son equivalentes en clase C^0 pero φ no es derivable al origen, entonces f y g no son equivalente de clase C^1.

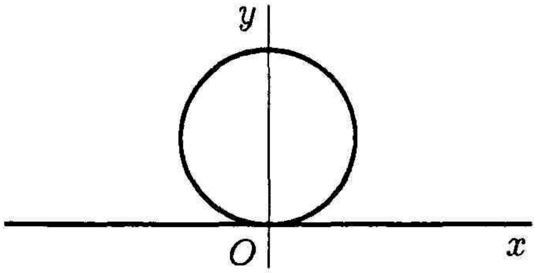

Figura 2.4:

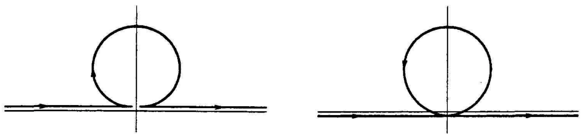

Figura 2.5:

6. Las representaciones parametricas de curvas:

$$f : R \to R^2 : t \to \begin{cases} (t+\pi, 0) & t \leq -\pi \\ (\sin t, 1+\cos t) & -\pi < t < \pi \\ (t-\pi, 0) & t \geq \pi \end{cases}$$

y

$$g : R \to R^2 : t \to \begin{cases} (t+\pi, 0) & t \leq -\pi \\ (-\sin t, 1+\cos t) & -\pi < t < \pi \\ (t-\pi, 0) & t \geq \pi \end{cases}$$

tienen el mismo soporte: la reunión del eje Ox y del circulo de radio 1 centrado en $(0,1)$. Pero del punto de vista cinematica, esas dos representaciones parametricas no describen el mismo movimiento: para f el soporte es recorrido de la izquierda hasta la derecha y para g, el soporte es recorrido en el sentido contrario. Esas dos representaciones parametricas de arcos no son equivalentes: no existe una biyección continua y de reciproca continua tal que podemas pasar de f a g y inversamente.

7. Si $a, b \in R_+^*$

$$f : R \to R^3 : t \to (a\cos t, a\sin t, \frac{bt}{2\pi})$$
$$g : R \to R^3 : t \to (a\cos t, -a\sin t, -\frac{bt}{2\pi})$$

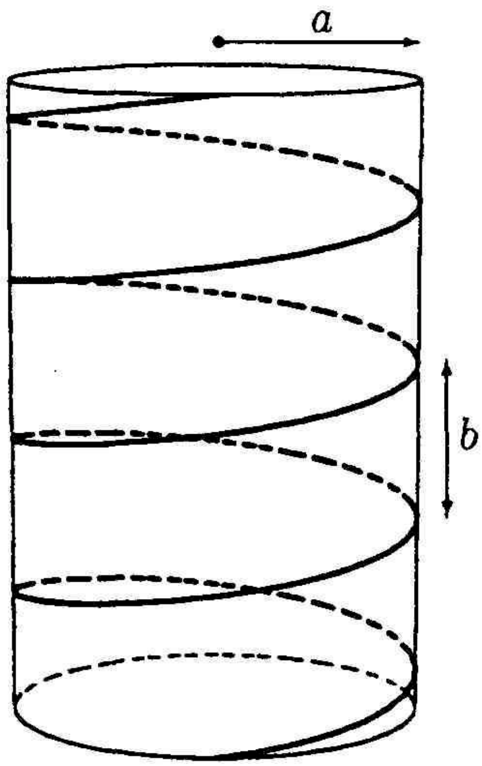

Figura 2.6: helice circular

son dos representaciones parametricas de arcos de clase C^{∞} en R^3. Como $f = g \circ \varphi$ si $\varphi : R \to R : t \to -t$, esas dos representaciones parametricas son equivalentes en clase C^{∞}. El arco que representan llamado helice circular de radio a y de paso b.

Curvas cerradas.

El circulo es el prototipo de la curva cerrada.

Definición:

una curva de clase C^k en E es dicha cerrada si ella tiene una representación parametrica definida sobre R periodica.

Orientación

La existencia , para la helice circular, de dos representaciones parametricas que se deducen una del otra por el difeomorfismo $t \to -t$ parece indicar que los arcos

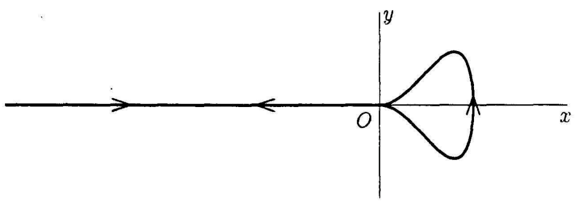

Figura 2.7:

pueden ser "recorrido" en los dos sentidos. Formalisando eso, vamos a llegar a la noción de orientación.

Un cambio de parametros (o difeomorfismo) entre representaciones parametricas de arco es una biyección continua de un intervalo en otro. Entonces, tiene que ser strictamente monotono, (strictamente creciente o strictamente descreciente). Los cambios de parametros entre una representación parametricas equivalentes se comparten entonces en dos clases. Si un cambio de parametros es ua función creciente, su reciproca lo es también y la compuesta de dos cambios de parametros crecientes es también creciente.

Definición:

Sea dos representaciones parametricas de arcos en E: $f : I \to \mathcal{E}$ *y* $g : U \to \mathcal{E}$. f *y* g *son dichas equivalentes y de misma orientación si existe un difeomorfismo* φ *creciente tal que* $f = g \circ \varphi$. *Un arco orientado es una clase de equivalencia por la relación "ser equivalente y de misma orientación".*

Los dos representaciones parametricas f y g de la helice son entonces de orientación opuesta.

El caso de las curvas es mucho mas delicato. Consideramos primero la función

$$f : R \to R^2 : t \to \begin{cases} (\frac{1-t^2}{2}, t(1-t^2)^2) & -1 < t < 1 \\ (|t|-1, 0) & t \leq -1, t \geq 1 \end{cases}$$

Es una representación parametrica de curva de clase C^1 pero manifestamiente, f no es inyectiva. Es interesente de representar graficamente esta curva y naturalmente, tenemos ganas de declarar tal curva no orientable.

El problema con esta representación parametrica es que admite dos restricciones que son representaciones parametricas de arcos equivalentes pero de orientaciones opuestas. Para que una curva sea orientable, necesitamos que este problema no se presenta.

Definición:

Vamos a decir que una representación de curva: $f : U \to \mathcal{E}$ *es orientable si cada vez que* $I, J \subseteq U$ *son intervalos abiertos tales que* f_I *y* f_J *son representaciones parametricas de arcos equivalentes, tienen la misma orientación. Una curva es orientable si tiene una representación parametrica orientable.*

Ejemplos:

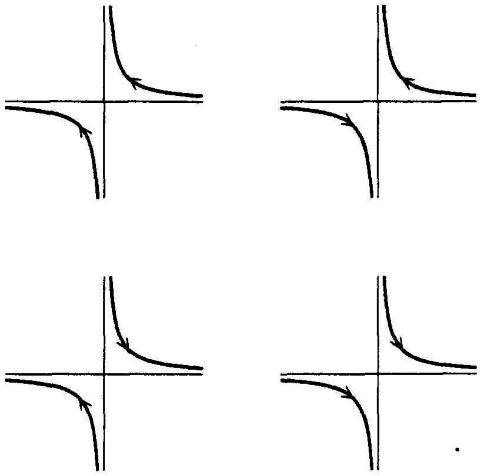

Figura 2.8:

1. la hiperbola dado en los ejemplos anteriores es constituada de dos arcos y cada uno puede ser orientado de dos maneras (ver figura (2.8)).

2. Observamos que

$$f : R^* \longrightarrow R^2 : t \longrightarrow \left(\frac{|t| + t}{2|t|} ln|t|, \frac{|t| - t}{2|t|} ln|t \right)$$

que representa la reunión de los ejes Ox y Oy es orientable: hay un solo punto doble: $f(-1) = f(1) = 0$, dos restricciones de f a intervalos nunca van a ser equivalentes. Como en el caso del hiperbola, 4 orientaciones existen.

3. La situación es igual para

$$g : R \longrightarrow R^2 : t \rightarrow (t^2 - 1, t(t^2 - 1)^2)$$

mismo si la curvatura admite, en el punto doble, dos tangentes confonditas.

2.3 Tangentes

Como la noción de curva, la noción de tangente puede ser estudiada de manera muy diversas. Euclide definio la tangente a un circulo como una linea (de su plano) encuentrando el circulo en un punto único. Esta definición es perfectamente adaptada al circulo pero no puedo generalizarse a otra curva. Una analisis mas fina nos revela que de hecho, la tangente a un circulo no lo encuentro en un punto único pero en un punto doble, es decir en dos puntos confondidos.

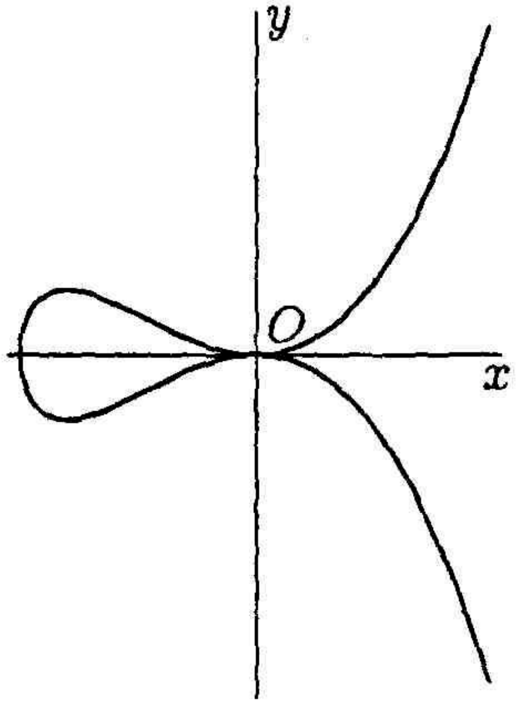

Figura 2.9:

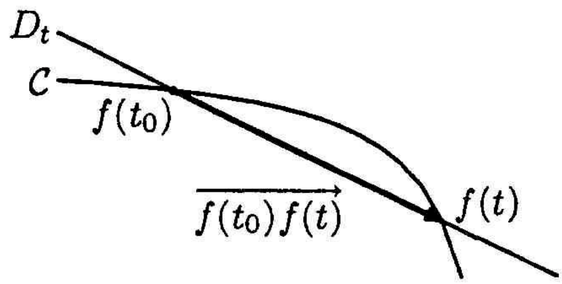

Figura 2.10: Definición de la tangente

Decir que la tangente a una curva en un punto la corta en dos puntos confonditos, es decir que una tangente tiene que ser la posición limite de una secante cuando los dos puntos de apoyo tienden uno al otro.

Entonces, sea en un espacio afin real E, un arco C representado por $f : I \to \mathcal{E}$ de clase C^1. Sea $t_0 \in I$. Consideramos la secante a la curva, determinada por el punto $f(t_0)$ y por un segundo punto $f(t)$ donde $t \neq t_0$. Esta linea D_t es entonces determinada por el punto $f(t_0)$ y por el vector director $\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$. El punto $f(t_0)$ no depiende de t y entonces no va a cambiar si hacemos tender t a t_0. El vector director va tender a cero, lo que no nos conviene. La solución es de "normalizar" de un manera este vector director. Lo que vamos a usar es el vector director definido de la siguiente manera:

$$\frac{1}{t - t_0}\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$$

que es paralelo a $\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$. Entonces, este vez, tenemos

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = f^{'}(t_0)$$

quien es diferente del vector nula en general pero necesito tomar algunas precauciones.

Definición:

Una representación parametrica de curva, $f : U \to \mathcal{E}$ de clase C^1 es regular en $t \in U$ si $f^{'}(t) \neq 0$, y regular si f es regular en cada real de su dominio.

Eso se aplica en particular a los representaciones parametricas de arcos de clase C^1. Observamos también que si $f : U \to \mathcal{E}$ y $g : V \to \mathcal{E}$ son dos representaciones parametricas de curvas, de clase C^1, equivalentes en clase C^1 via $\varphi : U \to V$, entonces, f es regular al punto $t \in U$ si y solamente si g es regular al punto $\varphi(t)$. De hecho, usando la regla de derivación de las funciones compuestas:

$$f^{'}(t) = (g \circ \varphi)^{'}(t) = g^{'}(\varphi(t))\varphi^{'}(t)$$

y $\varphi^{'}(t) \neq 0$ como φ es un difeomorfismo de clase C^1. Entonces,

$$f^{'}(t) \neq 0 \Leftrightarrow g^{'}(\varphi(t)) \neq 0$$

Podemos entonces definir la siguiente noción:

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea P un punto de un arco C de clase C^1;C es regular en P (o P es un punto regular de C) si $f : I \to \mathcal{E}$, una representación parametrica de clase C^1 de C y $t \in I$ tal que $f(t) = P$, f es regular en el punto t. Una curva de clase C^1 es regular si tiene una representación parametrica regular.

Esas definiciones que no dependen de las representaciones parametricas son bien "geometricas".

Hay que notar que la ultima definición se aplica también a los arcos. Pero no hay sentido de hablar de una curva regular en un punto. En hecho, si $P = f(t_1) = f(t_2)$, es muy posible que $f^{'}(t_1)$ sea nula y $f^{'}(t_2)$ no lo es.

Regresamos a la construcción de la tangente. Tenemos ganas de definir la tangente al arco, en un punto regular como la linea D determinada por el punto $f(t_0)$ y el vector director $f^{'}(t_0)$. Si g es una representación parametrica equivalente en clase C^1, $f = g \circ \varphi$ y la igualdad

$$f^{'}(t_0) = g^{'}(\varphi(t_0))\varphi^{'}(t_0)$$

indica que los vectores $f^{'}(t_0)$ y $g^{'}(\varphi(t_0))$ son paralelos de tal manera que la linea determinada por el punto $g(\varphi(t_0))$ y el vector director $g^{'}(\varphi(t_0))$ es nadamas la misma linea D. Eso garantizo que la definición siguiente es bien "geometrica".

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea $f : I \to \mathcal{E}$, una representación parametrica de arco de clase C^1. La tangente a este arco en un punto regular $f(t_0)$ es la derecha pasando por este punto y paralelo al vector $f^{'}(t_0)$.

Si en lugar de considerar un arco, hablamos de curva de clase C^1, la unica dificuldad suplementaria es la perdida de la inyectividad: puede existir diferentes valores de parametros que corresponden al mismo punto de la curva. Es entonces posible que los diferentes arcos tienen diferentes tangentes o que uno tiene una tangente y que el otro no lo tiene.

<u>Ejemplo</u>: la "estrofoida derecha" es representada por la representación parametrica siguiente (figua (2.11):

$$f : R \to R^2 : t \to \left(at\frac{1-t^2}{1+t^2}, a\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)$$

donde a es un real positivo no-cero. Manifestamiente, $f(-1) = f(1) = (0,0)$: el origen es un punto doble. Asi tenemos

$$f^{'}(t) = \left(a\frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}, \frac{-4at}{(1+t^2)^2} \right)$$

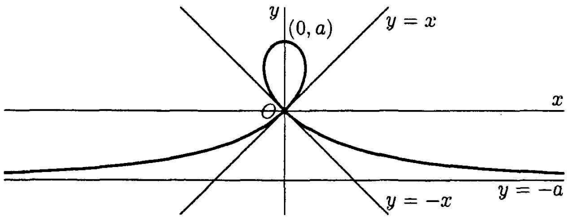

Figura 2.11: Estrofoida derecha

entonces

$$\begin{aligned} f^{'}(1) &= (-a,-a) \\ f^{'}(-1) &= (-a,a) \end{aligned}$$

La tangente al origen del arco representado por $f_{R^*_-}$ (o respectivamente $f_{R^*_+}$) a entonces por ecuación $y=-x$ (resp. $y=x$).

2.3.1 Puntos singulares

No hemos definido hasta ahora la tangente en un punto singular, pero no hemos dicho tampoco que en tal caso la tangente no existe.

Regresamos a la idea del inicio de esta sección, la tangente al arco C representado por f, al punto $f(t_0)$ es la derecha pasando por este punto y que admite como vector director el limite de un multiple convenable de $\overrightarrow{f(t_0)f(t)}$. En un punto regular, metemos en frente de este vector el coeficiente $1/(t-t_0)$ y el limite vale $f^{'}(t_0) \neq 0$. En un punto singular, si tenemos

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = 0$$

eso significa que el numerador tende a cero demasiado rapidamente comparado al denominador. Asi podemos probar de replazar eso por una potencia mas grande de $(t-t_0)$.

Haciendo la hipotesis que en t_0 una de las derivadas de orden superior de f sea no-cero. Notamos p el orden de la primera derivada no-cero en t_0 ($p \geq 2$, como suponemos que el punto es singular). Entonces, el polinomio de Taylor de orden p de f alrededor de t_0 es

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p$$

y

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{(t-t_0)^p}\overrightarrow{f(t_0)f(t)} = \lim_{t\to t_0} \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!} \neq 0$$

Asi vamos a definir la tangente a C en $f(t_0)$ la derecha pasando por $f(t_0)$ y admitiendo $f^{(p)}(t_0)$ como vector director.

En el caso de las curvas planas, los puntos singulares pueden ser clasificados de la siguiente manera.

Sea C un arco plano, representado por $f : I \rightarrow R^2$. Suponemos que en t_0, f admite dos derivados de orden superior linealmente independientes. Sea como en el caso anterior,p el orden de la primera derivada no-cero en t_0, sea q el orden de la derivada quien en t_0 es linealmente independiente de $f^{(p)}(t_0)$ $(q > p \geq 2)$. Asi, $\mathcal{R} \equiv (f(t_0); f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ es una referencial. El polinomio de Taylor de orden q de f en t_0 es

$$T^q_{t_0}f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p + \frac{f^{(q)}(t_0)}{q!}(t-t_0)^q$$

El arco C^* representado por $T^q_{t_0}f(t)$ es una buena aproximación de C al vecino de $f(t_0)$. Si notamos $x^{'}$ y $y^{'}$ los coordenadas en la referencia $\mathcal{R}$,

$$C^* \equiv \begin{cases} x^{'} = (t-t_0)^p/p! \\ y^{'} = (t-t_0)^q/q! \end{cases}$$

Usando esas ecuaciones, podemos ver el comportamiento de C^* y entonces de C en el vecino del punto $f(t_0)$: cuatro casos pueden presentarse en función de la paridad de p y q. De hecho, un exponiente par significa que la coordenada correspondiente va a tomar solamente valores postivos y a contrario, un exponiente impar significa que los dos signos van a aparecer:

1. si p es impar y q par: el punto singular es llamado "meplat"

2. si p y q son los dos impares, el punto singular es llamado inflección (a notar que un punto regular puede ser también un punto de inflección)

3. si p es par y q impar, el punto singular es llamado un "retroceso de primer tipo"

4. si p y q son los dos pares, el punto singular es llamada "retroceso de segundo tipo". En este caso, $T^q_{t_0}f(t)$ no es una representación de arco ni mismo de curva por que $T^q_{t_0}f(t_0+\Delta t) = T^q_{t_0}f(t-\Delta t)$ para cualquier Δt. Graficamente, eso corresponde a una curva que regresa sobre sus pasos.

2.4 Ecuación implícita de las curvas planas

La experiencia nos aprende que las curvas en $A^2(R)$ pueden ser descrita por ecuaciones implicitas de la forma siguiente:

$$F(x,y) = 0$$

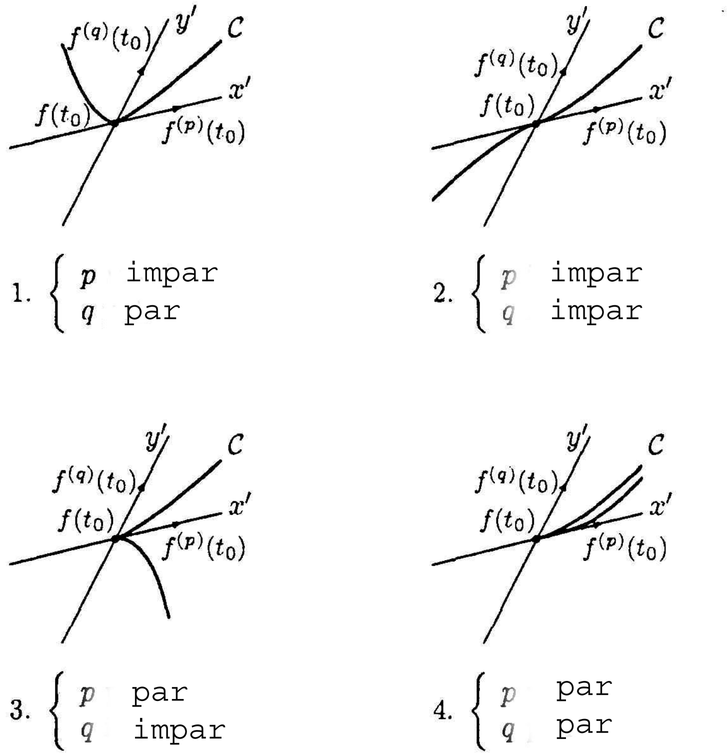

Figura 2.12: Puntos singulares

Pero cualquier ecuación $F(x, y) = 0$ no necesariamente va a describir una curva. Por ejemplo,

$$(|x| - 1 + ||x| - 1|)^2 + (|y| - 1 + ||y| - 1|)^2 = 0$$

describo el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq R^2$, lo que es demasiado "grande" para poder ser considerado como una curva. Y a contrario, la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0$$

tiene como solución el punto $(0, 0)$, lo que es demasiado "pequeño" para ser una curva.

El teorema de las funciones implicitas va a darnos las condiciones suficientes para que una ecuación implicita describo una curva. Sea F de R^2 en R y $(a, b) \in dom\ F$ tal que $F(a, b) = 0$. Llamamos explicitación local de y en función de x, a partir de la relación $F(x, y) = 0$, en la vecindad del punto (a, b), una función $\varphi : I \to J$ donde I es un intervalo abierto conteniando a y J un intervalo conteniendo b tal que

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in J)\ y = \varphi(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0 \tag{2.6}$$

Introduciendo el conjunto de los ceros de F

$$Z(F) \equiv \{(x, y) \in dom\ F : F(x, y) = 0\}$$

y el grafico de φ

$$G_\varphi \equiv \{(x, y) \in I \times R : y = \varphi(x)\}$$

La condición (2.6) se reescribo $G_\varphi = Z(F) \cap (I \times J)$. El teorema de las funciones implicita puede enunciarse:

$\boxed{\text{Teorema de las funciones implicitas:}}$

Sea F una función de R^2 en R y $(a, b) \in dom\ F$. Si

1. *$F(a, b) = 0$*

2. *F tiene en el vecindad de (a, b) derivades parciales continuas.*

3. *$\partial_2 F(a, b) \neq 0$*

Entonces, existe una explicitación local de clase C^1 , $\varphi : I \to J$ de y en función de x, a partir de la relación $F(x, y) = 0$, en la vecindad de (a, b): ademas, para cualquier $x \in I$, tenemos

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, \varphi(x))}{\partial_2 F(x, \varphi(x))}$$

Cuando los hipotesis del teorema de las funciones implicitas son satisfechas, podemos representar en la vecindad de (a, b) el conjunto de los (x, y) tales que $F(x, y) = 0$ por la función Φ

$$\Phi : I \to R^2 : t \to (t, \varphi(t))$$

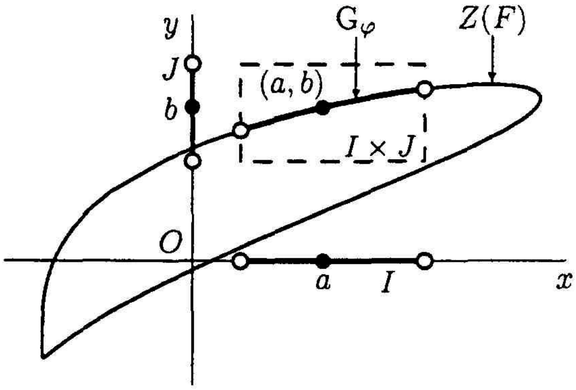

Figura 2.13: Teorema de las funciones implicitas.

Esta aplicación Φ es inyectiva por que su primera componente lo es y derivable sobre I. Es entonces bien una representación parametrica de arco. Entonces,

$$Z(F) \cap (I \times J)$$

es bien el soporte del arco.

Si, en (a, b),las condiciones (1) y (2) del teorema de las funciones implicitas no son satisfechas, asi que

$$\partial_1 F(a, b) \neq 0, \tag{2.7}$$

va a ser posible de explicitar $x = \Psi(y)$, Ψ es una función derivable tal que

$$\Psi^{'}(x) = -\frac{\partial_2 F(\Psi(y), y)}{\partial_1 F(\Psi(y), y)}$$

Y asi obtenemos localmente una representación parametrica del tipo

$$\Psi : J \to R^2 : t \to (\Psi(t), t)$$

Convenemos de llamar punto sencillo por F un punto que satisface (1) y (2) asi que (3) y (2.7). Asi demostramos que

Proposición*: Sea F de R^2 en R. Cualquier punto sencillo por F admite un vecindad V tal que*

$$\{(x, y) \in dom\ F : F(x, y) = 0\} \cap V$$

sea el soporte de un arco.

Un punto $(a, b) \in dom\ F$ tal qe $F(a, b) = \partial_1 F(a, b) = \partial_2 F(a, b) = 0$ es dicho punto multiple de F. No vamos a estudiar los puntos multiples. Vamos solamente mencionar que esos puntos multiples son muchas veces, pero no siempre, relacionado a "particularidades" del conjunto de los ceros de F.

Si $(a, b) \in dom\ F$ satisface (1),(2) y (3) , tenemos en la vecindad de este punto, un arco C de representación parametrica $\Phi : t \rightarrow (t, \varphi(t))$. La tangente T al arco en (a, b) admite como vector director:

$$\begin{aligned} \Phi^{'}(a) &= (1, \varphi^{'}(a)) \\ &= (1, -\frac{\partial_1 F(a,b)}{\partial_2 F(a,b)}) \end{aligned}$$

O también

$$v = (\partial_2 F(a,b), -\partial_1 F(a,b))$$

que es proporcional a $\Phi^{'}(a)$. Si son las condiciones (1),(2) y (2.7) que son satisfechas, tenemos la representación parametrica $\psi : t \rightarrow (\Psi(t), t)$ y

$$\begin{aligned} \psi^{'}(b) &= (\Psi^{'}(b), 1) \\ &= (-\frac{\partial_2 F(a,b)}{\partial_1 F(a,b)}, 1) \end{aligned}$$

La tangente T admite en los dos casos la siguiente ecuación parametrica:

$$T = \begin{cases} x = a + \lambda \partial_2 F(a,b) \\ y = b - \lambda \partial_1 F(a,b) \end{cases}$$

y su ecuación cartesiana:

$$T \equiv \partial_1 F(a,b)(x-a) + \partial_2 F(a,b)(y-a) = 0$$

Ejemplos:

1. Consideramos la ecuación del elipse $C \equiv (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ sobre la forma de $F(x, y) = 0$:

   $$F : R^2 \rightarrow R : (x,y) \rightarrow (x/a)^2 + (y/b)^2 - 1$$

   Entonces, tenemos

   $$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) = 2x/a^2 \\ \partial_2 F(x,y) = 2y/b^2 \end{aligned}$$

   El sistema $F(x, y) = \partial_1 F(x, y) = \partial_2 F(x, y) = 0$ es incompatible. Entonces, todos los puntos de C son sencillos por F. Si (x_0, y_0) es un punto de C, la tangente en este punto es igual a

   $$\begin{aligned} T &\equiv \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \\ &\equiv \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1 \end{aligned}$$

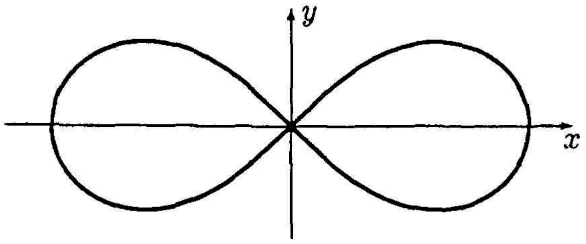

Figura 2.14: Lemniscate de Bernouilli

2. Consideramos ahora un hiperbola $H \equiv (x/a)^2 - (y/b)^2 = 1 \equiv F(x,y) = 0$ si
$$F : R^2 \to R : (x,y) \to (x/a)^2 - (y/b)^2 - 1$$
Entonces, tenemos
$$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) &= 2x/a^2 \\ \partial_2 F(x,y) &= -2y/b^2 \end{aligned}$$
De misma manera que el ejemplo anterior, el sistema $F(x,y) = \partial_1 F(x,y) = \partial_2 F(x,y) = 0$ es incompatible. Entonces, todos los puntos de H son sencillos por F. Si (x_0, y_0) es un punto de H, la tangente en este punto es igual a
$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \\ &\equiv \frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1 \end{aligned}$$

3. Consideramos ahora la hiperbola degenerada en dos derechas secantes $H \equiv (x/a)^2 - (y/b)^2 = 0 \equiv F(x,y) = 0$ si
$$F : R^2 \to R : (x,y) \to (x/a)^2 - (y/b)^2$$
Entonces,
$$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) &= 2x/a^2 \\ \partial_2 F(x,y) &= -2y/b^2 \end{aligned}$$
el sistema $F(x,y) = \partial_1 F(x,y) = \partial_2 F(x,y) = 0$ tiene la solución $(x,y) = (0,0)$: el origen quien es el punto de intersección de los dos derechas el cuales se descompone la hiperbola es un punto multiple por F. Los otros puntos de H son sencillos por F.

4. El "lemniscate" de Bernouilli es la curva de ecuación:

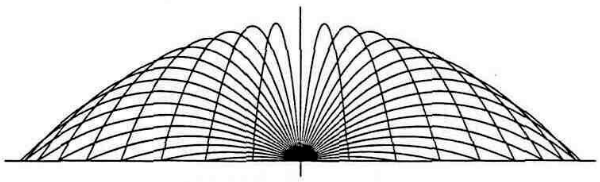

Figura 2.15: Envolvente de una familia de curvas

$$B \equiv (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

donde a es un real positivo no-cero. Sea

$$F : R^2 \to R : (x, y) \to (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$$

entonces, tenemos

$$\partial_1 F(x, y) = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2)^2$$
$$\partial_2 F(x, y) = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2)^2$$

el sistema $F(x, y) = \partial_1 F(x, y) = \partial_2 F(x, y) = 0$ tiene la solución $(x, y) = (0, 0)$: el origen es un punto multiple por F, los otros puntos son puntos sencillos por F. Como en el caso de la hiperbola degenerada, la intuición sugere que deberiamos necesitar dos arcos y no solamente uno para representar el "comportamiento" de la lemniscate alrededor del origen.

2.5 Envolvente de una familia de curvas planas

Vamos a empezar con un ejemplo.

Un arma de fuego puede disparar su proyectil en el plan vertical Oxz bajo diversos ángulos de disparo, pero siempre con la misma velocidad inicial. A cada posición del arma corresponde una trayectoria del proyectil que es una parabola si despreciamos la resistencia del aire. Todas esas parabolas occupan un region del plan Oxz. Cual es esta region? O para decirlo de otra manera, cuales son los puntos que puede tocar el arma. Esta region tiene como frontera una curva que tiene la particularidad de ser tangente a cada de las parabolas, es decir que su tangente en cada punto es la misma que la tangente a la parabola. Eso nos conduce a la siguiente definición:

Definición:

Sea U un abierto de R y $\mathcal{F} \equiv (C_u)_{u \in U}$ una familia de curvas planas regulares. Vamos a llamar envolvente de $\mathcal{F}$ una curva plana regular A que admite una representación parametrica $f : V \to R^2$ por lacual existe una función $\omega : V \to U$ suryectiva, localmente inyectiva y continua tal que , para cualquier $t \in V$, tenemos

1. *$f(t)$ es un punto de $C_{\omega(t)}$*

2. *En este punto, A y $C_{\omega(t)}$ tienen la misma tangente.*

Notas:

1. La función ω indica a cual de las curvas de la familia $\mathcal{F}$ la envolvente es tangente en el punto de parametro t. En función de eso, las hipotesis hechas sobre ω aparecen naturales:

   - decir que ω es suryectiva, es decir que A tiene un punto comun con cada curvas C_u.
   - decir que ω es localmente inyectiva (es decir que para cualquier $t \in V$, existe un intervalo abierto I que contiene t y contenido en V tal que f_I sea inyectiva), es decir que dos puntos vecinos distinctos de A son sobre dos curvas C_u y $C_{u'}$ con $u \neq u^{'}$. Eso impedo que una curva de $\mathcal{F}$ (o un arco de tal curva) sea parte de la envolvente.
   - decir que ω es continua, es decir que dos puntos vecinos de la envolvente tienen que estar sobre dos curvas C_u y $C_{u'}$ con u "vecino" a $u^{'}$.

2. En el caso lo mas sencillo, es posible de encontrar para A una representación parametrica $f : U \to R^2$ de dominio U y de tomar $\omega = I_U$. En muchos otros casos, eso no es posible

Proposición*:*
Sea C un arco plano regular, si $\mathcal{F}$ es la familia de las tangentes a C, entonces C es la envolvente de $\mathcal{F}$.

La demostración de esta proposición es evidente.

Para hallar la envolvente de una familia de curvas, podemos usar el siguiente teorema:

Teorema (de las ecuaciones de Liebniz):

Sea F una función de R^3 en R de clase C^1. Suponemos que para cualquier u en un intervalo abierto U de R, la ecuación $F(x, y; u) = 0$ describo una curva regular C_u. Si la familia $\mathcal{F} \equiv (C_u)_{u \in U}$ tiene una envolvente A, representado por $f : V \to R^2$ de clase C^1 con $\omega : V \to U$ derivable, entonces, los puntos de A son soluciones del sistema

$$\begin{cases} F(x, y; u) = 0 \\ \partial_3 F(x, y; u) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Esas dos ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Leibniz. Ellas describen una parte P del plano que contiene A. Eliminar u entre los dos ecuacions nos da una ecuación implicita de P. Resolver el sistema explicitamente en x y y en función de u nos da una representación parametrica de P.

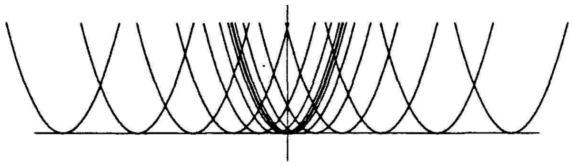

Figura 2.16:

Tenemos que repetir que las ecuaciones de Liebnitz da solamente una condición necesaria para que (x, y) pertenece a la envolvente. Dicho de otra manera, el conjunto descrito por las Ec.(2.8) contiene la envolvente pero puede contener también puntos "parasitos". Por ejemplo, si los puntos del arco representado por $g : I \to R^2$ son todos puntos multiples de las curvas C_u, entonces, satisfacen también las Ec.(2.8). Puede pasar también que para un valor $u_0 \in U$, tenemos $\partial_3 F(x, y; u) = 0$ en cada punto de C_{u_0}. En tal caso, la curva C_{u_0} es parte del conjunto de las soluciones de las ecuaciones de Liebniz.

Ejemplos:

1. La ecuación $x^2 - y^2 = 0$ describo una hiperbola H_0 degenerada en dos derechas de ecuaciones $y = x$ y $y = -x$. Notamos H_u el imagen de H_0 por translación de vector $(u, 0)$ $(u \in R)$. Es evidente que tal familia de curvas no admite una envolvente. Pero si aplicamos las ecuaciones de Liebniz, tenemos

$$\begin{aligned} H_u &\equiv (x-u)^2 - y^2 \\ F(x, y; u) &= 0 = (x-u)^2 - y^2 \\ \partial_3 F(x, y; u) &= 0 = x - u \end{aligned}$$

Eliminando u, obtenemos como solución del sistema de ecuaciones el eje Ox de ecuación $y = 0$. Eso es debido al hecho que el origen es un punto multiple de H_0 y $(u, 0)$ un punto multiple de H_u: el eje Ox es el lugar de los puntos multiples de las hiperbolas H_u.

2. Consideramos la parabola P_0 de ecuación $y = x^2$ asi que sus imagen P_u por la translación de vector $(u^3, 0)$. La parabola P_u es tangente, en el punto $(u^3, 0)$ al eje Ox: este es entonces la envolvente de la familia $(P_u)_{u \in R}$. Como P_u tiene como ecuación $y = (x - u^3)^2$, podemos hallar las ecuaciones de Liebniz y obtenemos (ver figura (2.16):

$$\begin{cases} y - (x-u^3)^2 = 0 \\ u^2(x-u^3)^2 = 0 \end{cases}$$

La eliminación de u nos da como solución $y = 0$ y $y = x^2$, que describo la envolvente y la parabola P_0. La razon de eso es que la función $u \to u^3$

presenta un punto estacionario en 0 lo que hace que , en la familia (P_u) , la parabola P_0 es estacionaria.

3. Sea la familia $(C_u)_{u\in R}$ de curvas donde $C_u \equiv y = u(x-u)^2$. Cuando $u \neq 0$, C_u es una parabola de eje vertical y de vertice $(u,0)$ y $C_0 = Ox$. La eliminación de u entre los dos ecuaciones de Liebniz :

$$\left\{ \begin{array}{c} y - u(x-u)^2 = 0 \\ (x-3u)(x-u) = 0 \end{array} \right.$$

nos da como solución $y = 0$ y $y = \frac{4}{27}x^3$. La primera solución describo Ox que es una de las curvas de la familia. La pregunta es ahora de saber si esta solución es una solución parasita o no? La respuesta es que el eje Ox es parte de la envolvente como en cada de sus puntos, excepto en el origen, el eje Ox es tangente a una de las parabolas y que al origen, es tangente a el mismo.

4. Regresamos al ejemplo inicial. Escogimos una referencia ortonormal con origen la posición del arma y escogimos el eje Ox como eje horizontal. Notamos φ el ángulo entre Ox y la dirección de disparo y v la velocidad inicial del proyectil. El vector velocidad inicial de este proyectil es entonces $(v\cos\varphi, v\sin\varphi)$ y el movimiento es descrito por las siguientes ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} x = (v\cos\varphi)t \\ y = (v\sin\varphi)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right.$$

Obtenemos una ecuación implicita de la trayectoria eliminando t:

$$y = \tan\varphi.x - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v\cos\varphi}\right)^2$$

Poniendo $u = \tan\varphi$, esta ultima ecuación puede reescribirse como

$$y = ux - \frac{g}{2v^2}(1+u^2)x^2$$

Las ecuaciones de Liebniz son entonces iguales a:

$$\left\{ \begin{array}{c} y = ux - \frac{g}{2v^2}(1+u^2)x^2 \\ x - \frac{gu}{v^2}x^2 = 0 \end{array} \right.$$

Lo que admiten como soluciones:

$$x = y = 0$$

o

$$\left\{ \begin{array}{c} u = v^2/(gx) \\ y = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}x^2 \end{array} \right.$$

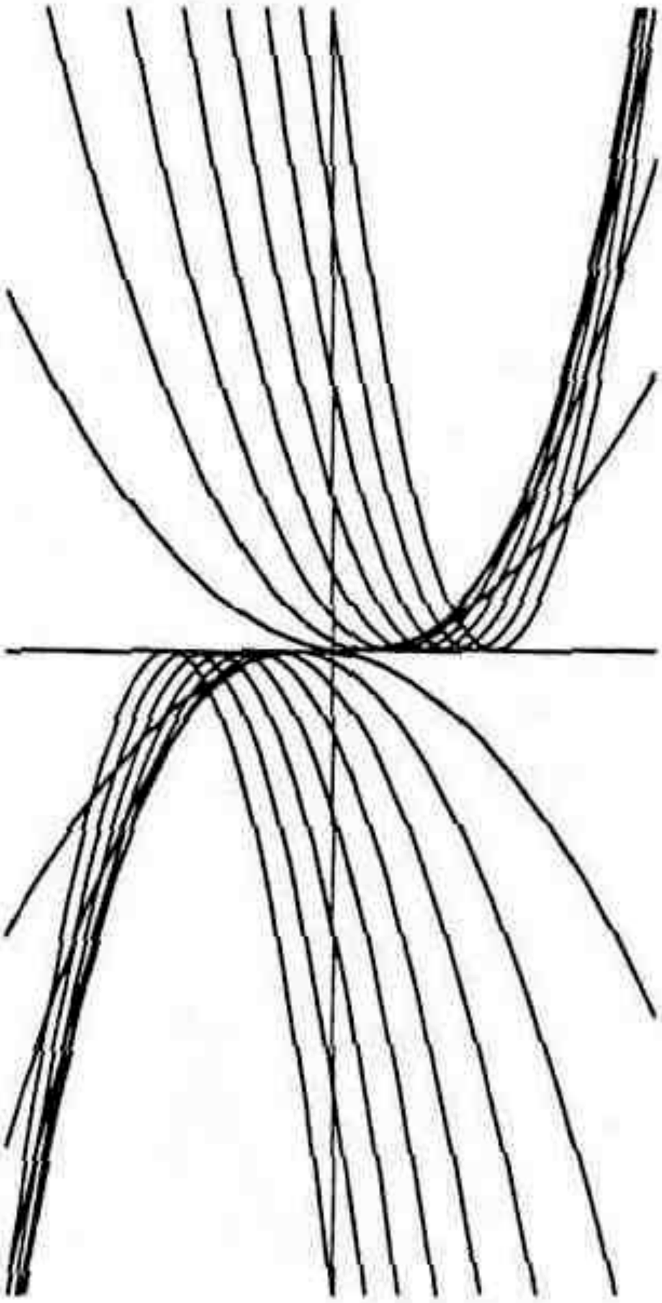

Figura 2.17:

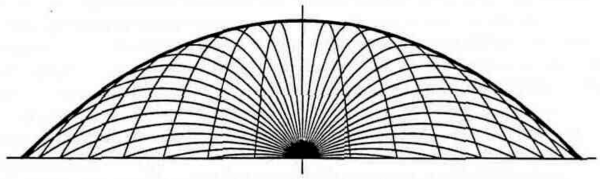

Figura 2.18: Parabola de seguridad

La primera solución esta describiendo el origen: es un punto parasito. Y la envolvente tiene como ecuación

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{g} - \frac{gx^2}{v^2}\right)$$

es una parabola de eje Oy. Los artilleros llaman la parabola de seguridad: el exterior de esta parabola es a cubierto de los disparos.

2.6 Rectificación o longitud de un arco

A partir de esta sección, vamos a estudiar las curvas del punto de vista métrico. Eso significa que nos plazamos en un espacio euclidiano E.

Antes de poder hallar la longitud de un arco, tenemos que primero definirlo. La idea es la siguiente: sabemos que la longitud de un segmento (abierto o cerrado) es:

$$L([AB]) = L(]AB[) = d(A, B)$$

y entonces sabemos lo que es la longitud de una linea rota $[A_0A_1]\cup ... \cup[A_{n-1}A_n]$:

$$L([A_0A_1] \cup ... \cup [A_{n-1}A_n]) = \sum_{k=1}^{n} d(A_{k-1}, A_k)$$

Por un arco, tenemos ganas de decir que su longitud es acercada por la longitud de una linea roto inscrita y que la aproximación es mejor si cada uno de los segmentos de esta linea rota es lo mas corto posible. De alla, la idea de definir la longitud de un arco como el limite de la longitud de lineas rotas inscritas. Pero, el concepto de limite que necesitamos es muy pesado: necesitamos una limite portando sobre el número n de segmentos y sobre un número variable de puntos intermediarios. Una mejor idea es de usar la desigualdad triangular y que si introducimos mas puntos intermediarios la longitud de la linea rota va a aumentar. Asi podemos definir la longitud de un arco como el supremum de las longitudes de las lineas rotas inscritas.

Si un arco es representado por $f : I \to \mathcal{E}$, una linea rota inscrita es determinada por una lista $(u_0, u_1, ..., u_n)$ en I y decir que la linea rota $\left[f(u_0)f(u_1)\right] \cup$

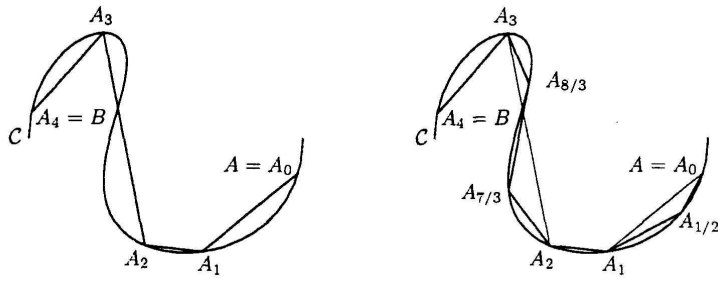

Figura 2.19: Longitud de un arco

$... \cup [f(u_{n-1})f(u_n)]$ no regresa por atras, es decir que esta lista es strictamente creciente: $u_0 < u_1 < ... < u_n$. Vamos a notar $I^{(<)}$ el conjunto de esas listas:

$$I^{(<)} \equiv \bigcup_{n \in N} \left\{ (u_0, u_1, ..., u_n) \in I^{n+1} : u_0 < u_1 < ... < u_n \right\}$$

Dado una lista $u = (u_0, u_1, ..., u_n) \in I^{(<)}$, notamos $l(f, u)$ la longitud de la linea rota inscrita $\left[f(u_{0)}f(u_1)\right] \cup ... \cup [f(u_{n-1})f(u_n)]$ que ella determina:

$$l(f, u) \equiv \sum_{k=1}^{n} d(f(u_{k-1}), f(u_k))$$

Vamos a notar

$$\mathcal{L}(f) \equiv \left\{ l(f, u) : u \in I^{(<)} \right\} \subseteq R_+$$

Lema:

Si f y g son dos representaciones paramtricas de arco equivalente, entonces $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$.

Asi podemos definir ahora la longitud de un arco:

Definición:

Sea C un arco en un espacio euclidiano E, representada por $f : I \to \mathcal{E}$; C es dicha rectificable si $L(f)$ es mayorado. En tal caso, su supremum es llamado longitud de C:

$$L(C) \equiv \sup \mathcal{L}(f)$$

Ejemplos:

1. Vamos a estudiar la linea AB, A y B son dos puntos de un espacio euclidiano. Podemos usar la representación parametrica:

$$f : R \to \mathcal{E} : t \to A + t\overrightarrow{AB}$$

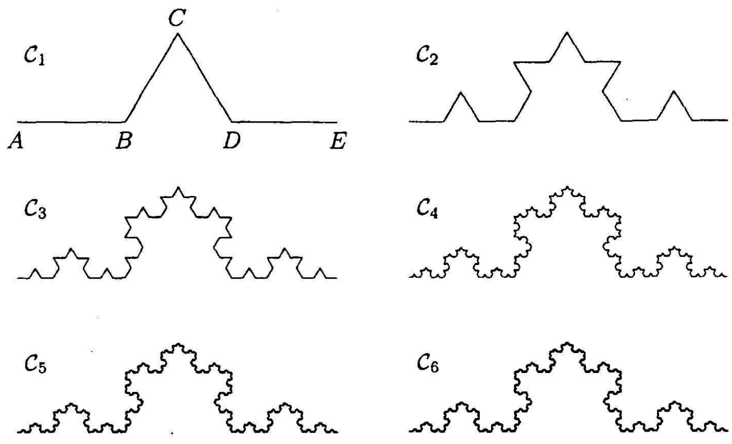

Figura 2.20: Curva de Koch

Por $u = (u_0, u_1, ..., u_n) \in R^{(<)}$, tenemos

$$l(f, u) = (u_n - u_0)d(A, B)$$

Y entonces,

$$\mathcal{L}(f) = \{(u_n - u_0)d(A, B) : u_0 < u_n\} = R_+^*$$

Esto conjunto no es mayorado y entonces la linea no es mesurable.

2. Un ejemplo de arco acotado no rectificable nos es dado por la curva de Koch. Empezamos con un segmento $]AE[$ y cambiamos el tercero central $]BD[$ por los dos lados $]BC[$ y $]CD[$ de un triángulo equilateral de base $]BD[$. Sea C_1 la linea rota $]AB[\cup]BC[\cup]CD[\cup]DE[$. Reiteramos esta operación, replazando cada de los 4 segmentos por una linea rota como hecho en la primera etapa. Eso nos da una linea rota C_2 y de nuevo vamos a aplicar el mismo proceso a este curva y asi de seguida. La curva de Koch C es el limite de la sucesión de curvas $(C_0, C_1, ...)$ asi construida. Sea l la longitud de $]AE[$. Entonces, cada curva C_n es una linea rota inscrita en C y su longitud es $(4/3)^n l$. Como $\sup_{n\in N}(4/3)^n l = \infty$, C no es rectificable.

3. Sea C una curva cerrada, descrita por la representación parametrica $f : I \to \mathcal{E}$, periodica de periodo p. Si $f_{]0,p[}$ es una representación parametrica de arco, definimos la longitud de C como la longitud de este arco. Por ejemplo, el circulo centrado en el origen y de radio a en $E^2(R)$ tiene como representación parametrica:

$$f : R \to R^2 : t \to (a \cos t, a \sin t)$$

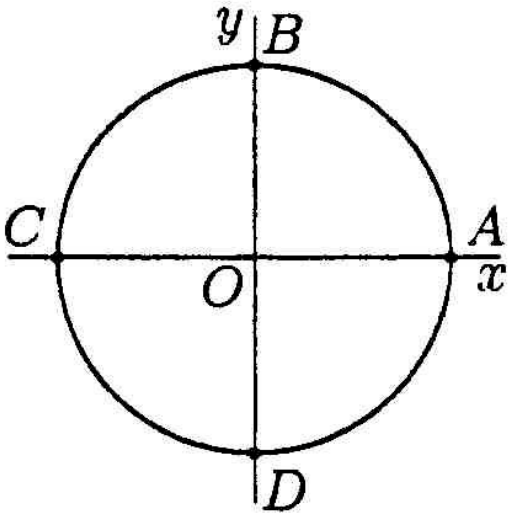

Figura 2.21:

Esta representación parametrica es una representacion parametrica de curva pero no de arco. El periodo de f es 2π. Sea entonces

$$g = f_{]0,2\pi[} :]0, 2\pi[\to R^2 : t \to (a \cos t, a \sin t)$$

representando C_1. Por definición

$$L(C) \equiv L(C_1)$$

La noción de longitud de un arco satisface las propiedades usuales asociados a la noción de distancia. Por ejemplo, tenemos la propiedad de additividad de las longitudes de dos arcos. Es el contenido de la proposición siguiente:

Proposición:

Sea $f : I \to \mathcal{E}$ una representación parametrica de un arco C y sea $P = f(r)$ un punto de este arco. Definimos $I_1 \equiv \{t \in I : t < r\}$ y $I_2 \equiv \{t \in I : t > r\}$ y $f_k \equiv f_{I_k}$. Sea C_k el arco representado por f_k. En esas condiciones,C es rectificable si y solamente si $C_{1,2}$ son rectificables y en este caso tenemos

$$L(C) = L(C_1) + L(C_2)$$

Consecuencia: Si un arco C es rectificable, cualquier sub-arco $C^{'}$ de C es rectificable y $L(C^{'}) \leq L(C)$.

La proposición anterior nos sugere como definir la longitud de una curva: es suficiente de decomponer esta curva en arcos disjuntos y de addicionar las longitudes.

Pero hasta ahora, tenemos una buena definición de la longitud de un arco pero no muy util por un calculo pratico. Es el objeto de la siguiente proposición de darnos un metodo pratico de calculo de la longitud de un arco.

Proposición:

Sea C un arco de clase C^1 en un espacio euclidiano E, representado por $f : I \to \mathcal{E}$. En esas condiciones, C es rectificable si y solamente si $\int_I \left\| f' \right\|$ converge y en este caso,

$$L(C) = \int_I \left\| f' \right\|$$

Demostración:

Vamos a demostrar solamente la mitad de la proposición. Suponemos que $\int_I \left\| f' \right\|$ converge. Consideramos una linea rota inscrita en C, determinada por la lista $u = (u_0, u_1, ..., u_n) \in I^{(<)}$, tenemos

$$\begin{aligned} l(f,u) &= \sum_{k=1}^{n} \left\| \overrightarrow{f(u_{k-1})f(u_k)} \right\| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{u_{k-1}}^{u_k} f' \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{u_{k-1}}^{u_k} \left\| f' \right\| \\ &= \int_{u_0}^{u_n} \left\| f' \right\| \\ &\leq \int_I \left\| f' \right\| \end{aligned}$$

Entonces, $\mathcal{L}(f)$ es mayorado por $\int_I \left\| f' \right\|$ y entonces C es rectificable y $L(C) \leq \int_I \left\| f' \right\|$.

Ejemplos:

1. Hallamos la longitud del circulo definido en el ejemplo anterior:

   $$f'(t) = (-a \sin t, a \cos t)$$

   y entonces,

   $$\left\| f'(t) \right\| = a$$

   y entonces,

   $$L(C) = \int_0^{2\pi} a = 2\pi a$$

2. la "conchoespirale" es la curva espacial representada por

$$f : R \to R^3 : t \to (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

Podemos verificar que esta curva es dibujada sobre la capa superior del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$. Hallamos la longitud del arco C de conchoespirale compresa entre el vertice del cono y el plano horizontal de lado 1.

$$f^{'}(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\cos t + \sin t), e^t)$$

y entonces,

$$\left\| f^{'}(t) \right\| = \sqrt{3} e^t$$

Como $f_3(t) < 1$ si y solamente si $t < 0$, el arco a medir es representado por la función $g = f_{R^*_-}$ y tenemos

$$\begin{aligned} L(C) &= \int_{R^*_-} \left\| g^{'}(t) \right\| \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

3. La longitude de la lemniscate de Bernouilli:

$$f^{'}(t) = \left(\frac{a \sin t (\sin^2 t - 3)}{(1 + \sin^2 t)^2}, \frac{a(1 - \sin^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2} \right)$$

Entonces,

$$\left\| f^{'}(t) \right\| = \frac{a}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

Y la longitud de la lemniscate es igual a

$$\begin{aligned} L(B) &= a \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} \\ &= a \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{2\pi}} \\ &\simeq 5.24a \end{aligned}$$

2.7 Representaciones normales

Sea E un espacio euclidiano

$\boxed{\text{Definición:}}$

Una representación parametrica de curva $f : I \to \mathcal{E}$ es dicha normal si es de clase C^1 y si $\left\| f^{'} \right\| = 1$

Usando la proposición anterior, eso significa que para cualquier $a, b \in I$, si C es el arco de curva representado por f, tenemos

$$L(C) = |b - a|$$

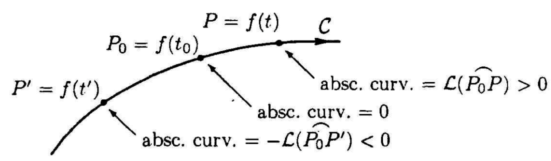

Figura 2.22: Abscisa curvilinea

Para decirlo de otra manera, una representación parametrica es normal si y solamente el parametro esta mediando la longitud del arco, contada a partir de un punto de la curva, escogido como origen.

2.7.1 Abscisa curvilinea.

Sea C un arco orientado de clase C^1, representado por $f : I \to \mathcal{E}$, escogimos un punto $P_0 = f(t_0)$ como origen y convenemos de llamar **abscisa curvilinea** de un punto $P = f(t)$ la longitud $L(P_0P)$ si $t > t_0$ y el opuesto de esta longitud si $t < t_0$.

Ponemos

$$\sigma : I \to R : t \to \sigma(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \left\| f' \right\|$$

Asi, $\sigma(t)$ es la abscisa curvilinea del punto $f(t)$, que t sea inferior o superior a t_0. Entonces, $\sigma' = \left\| f^i \right\| \geq 0$ y σ es creciente. Ademas, σ' no es igual a cero sobre un intervalo, otramente f seria una función constante sobre este intervalo y no seria inyectiva. Entonces, σ es strictamente creciente. Si J =im σ, σ es una biyección de I sobre J de clase C^1. Su reciproca es continua pero no necesariamente derivable. Con estas condiciones, el compuesto

$$J \to^{\sigma^{-1}} I \to^{f} \mathcal{E}$$

es una representación parametrica de C de clase C^0 equivalente a f en clase C^0 (y de misma orientación que f). La notamos $\overline{f} : J \to \mathcal{E}$.

Si ademas, f es regular, como f' nunca se anula porque

$$(\sigma^{-1})' = \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} = \frac{1}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}$$

La reciproca σ^{-1} es también de clase C^1:σ es entonces un difeomorfismo de clase

C^1 y

$$\begin{aligned}
\overline{f}' &= (f \circ \sigma^{-1})' \\
&= (f' \circ \sigma^{-1}).(\sigma^{-1})' \\
&= \frac{f' \circ \sigma^{-1}}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} \\
&= \frac{f' \circ \sigma^{-1}}{\|f'\| \circ \sigma^{-1}} \\
&= \frac{f'}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}
\end{aligned}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{f}'\right\| &= \left\|\frac{f'}{\|f'\|}\right\| \circ \sigma^{-1} \\
&= \frac{\left\|f'\right\|}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

lo que nos demostro que $\overline{f}$ es una representación normal.

Ejemplos:

1. Sea $k \in R_+^*$, la función

$$f : R \to R^2 : t \to (e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t)$$

es una representación parametrica regular de la espirale logaritmica. Entonces,

$$f'(t) = (e^{kt}(k \cos t - \sin t), e^{kt}(k \sin t + \cos t))$$

y

$$\left\|f'(t)\right\| = \sqrt{k^2 + 1} e^{kt}$$

Entonces si tomamos el punto $(1, 0) = f(0)$ por origen de las abscisas curvilineas:

$$\begin{aligned}
\sigma(t) &= \int_0^t \left\|f'\right\| \\
&= \sqrt{k^2 + 1} \int_0^t e^{kx} dx \\
&= \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (e^{kt} - 1)
\end{aligned}$$

Y entonces,

$$\sigma^{-1}(s) = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{ks}{\sqrt{k^2 + 1}} + 1 \right)$$

Una representación parametrica normal de la espirale logaritmica es igual a

$$\overline{f} = f \circ \sigma^{-1} : R \to R^2$$

$$s \to \left(\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1\right)\cos\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1\right)\right)\right.$$
$$\left.\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1\right)\sin\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}} + 1\right)\right)\right)$$

Pero podemos tomar otro punto de origen. En particular podemos tomar el punto $0 = \lim_{t\to-\infty} f(t)$ como origen de las abscisas curvilineas. En tal caso, obtenemos:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \left\| f^{'} \right\|$$
$$= \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} e^{kt}$$
$$\Rightarrow \sigma^{-1}(s) = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}}\right)$$

$$\overline{f} = f \circ \sigma^{-1} : R \to R^2$$

$$s \to \left(\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}}\right)\cos\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}}\right)\right)\right.$$
$$\left.\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}}\right)\sin\left(\frac{1}{k}\ln\left(\frac{ks}{\sqrt{k^2+1}}\right)\right)\right)$$

2. Consideramos en $E^2(R)$ la parabola semi-cubica representada por (ver figura (2.23):

$$f : R \to R^2 : t \to (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3)$$

Esta función es una representación parametrica de un arco de clase C^∞ pero no es regular porque $f^{'}(0) = 0$. De hecho, $f^{'}(t) = (t, t^2)$ y $\left\| f^{'} \right\| = |t|\sqrt{1+t^2}$. Asi si tomamos el punto $O = f(0)$ como origen de las abscisas curvilinea, tenemos

$$\sigma : R \to R : t \to \sigma(t)$$
$$\sigma(t) \equiv \int_0^t \left\| f^{'} \right\|$$
$$= \frac{1}{3} sgn(t)\left((1+t^2)^{3/2} - 1\right)$$

La reciproca de esta biyección es

$$\sigma^{-1} : R \to R : s \to \sigma^{-1}(s)$$
$$\sigma^{-1}(s) \equiv sgn(t)\sqrt{(1+3|s|)^{2/3} - 1}$$

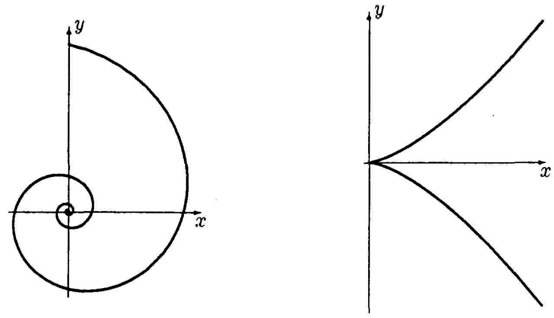

Figura 2.23: representaciones de primero la espiral logaritmica y de la parabola semi-cubica

que no es derivable en O. Composando f con σ^{-1}, obtenemos una representación parametrica:

$$\overline{f} = f \circ \sigma^{-1} : R \rightarrow R^2$$
$$s \rightarrow \left(\frac{1}{2} \left((1 + 3\,|s|)^{2/3} - 1 \right), \right.$$
$$\left. \frac{1}{3} sgn(s) \left((1 + 3\,|s|)^{2/3} - 1 \right)^{3/2} \right)$$

esta representación parametrica es equivalente a f en clase C^0 pero no es derivable en 0. Entonces, $\overline{f}$ no es una representación parametrica normal. Pero $\overline{f}_{R_+^*}$ o $f_{R_-^*}$ son representación parametrica norma equivalente a $f_{R_{+,-}^*}$ en clase C^∞.

2.7.2 Vector tangente.

Sea C un arco orientado regular. Tiene una representación parametrica normal $\overline{f} : J \rightarrow \mathcal{E}$. En cualquier punto $\overline{f}(s)$, la derivada $\overline{f}^{'}(s)$ es un vector unitario. Este vector es el vector tangente al arco en el punto considerado. Lo notamos $\overrightarrow{t} \equiv \overline{f}^{'}$.

El vector tangente se calcula muy facilmente a partir de la representación parametrica no necesariamente normal. Si $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ es una representación parametrica regular de C, perteneciendo a la orientación escogida, $\overline{f} = f \circ \sigma^{-1}$, entonces tenemos

$$\overrightarrow{t} = \frac{f^{'}}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}$$

Observemos que si cambiamos la orientación de C, el vector tangente es cambiado por su opuesto.

2.8 Curvas planas (curvatura)

Vamos ahora estudiar las curvas en el plan euclidiano orientado $E^2_+(R)$.

2.8.1 Vector normal.

Si P es un punto regular de un arco C en $E^2_+(R)$, este admite en P una tangente T. Existe una y una sola derecha ortogonal a T en P, lo llamamos **la normal a** C **en** P. Si C es orientado, tiene un vector tangente en P, $\overrightarrow{t}$, llamamos el vector norma a C en P el vector $\overrightarrow{n}$ tal que $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$ sea una base ortonormal directa.

Notas:

Consideramos, sobre la curva C determinada por la ecuación implicita $F(x, y) = 0$, un punto $P = (a, b)$ sencillo por F. Vimos anterioramente que $v = (\partial_2 F(a, b), -\partial_1 F(a, b))$ es un vector director de la tangente a C en P. El vector $u = (\partial_1 F(a, b), \partial_2 F(a, b))$ es ortogonal a v, entonces es el vector director de la normal N a C en P. Asi tenemos,

$$\begin{aligned} N &\equiv \begin{cases} x = a + \lambda \partial_1 F(a, b) \\ y = b + \lambda \partial_2 F(a, b) \end{cases} \\ &\equiv \partial_2 F(a, b).(x - a) = \partial_1 F(a, b).(y - b) \end{aligned}$$

2.8.2 Curvatura.

El encanto de las curvas es de ser curva. Una curva no curva es nadamas que una recta.

La idea de inicio es que nuestra noción de curvatura tiene que traducir las variaciones de dirección de la curva. Para determinar la dirección de la curva, podemos usar el vector tangente si una orientación fue escogida. De hecho, el vector tangente es un vector unitario. Entonces, no cambia en norma, solamente va a cambiar en dirección y estudiar sus variaciones de dirección es igual a estudiar las variaciones del vector tangente. Pero en función de cual parametro podemos representarlo? Queremos una noción geometrica, no cinematica. En lugar de usar un parametro cualquiera, vamos a usar como parametro la abscisa curvilinea que es algo intrinseco a la curva. En fin, para medir las variaciones del vector tangente, lo mas natural que usar es usar la noción de derivada. Asi vamos a definir la noción de curvatura de la siguiente manera:

Definición:

Sea C un arco plano orientado con una representación parametrica normal $\overline{f} : I \to R^2$ de clase C^2. Vamos a llamar el vector de curvatura de C la derivada del vector tangente $\overrightarrow{t}$, es decir el vector $\overrightarrow{k} \equiv \overline{f}''$.

Podemos notar que $\overline{f}' \perp \overline{f}''$, es decir que $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{t}$. El vector curvatura es entonces normal a la curva. Ademas, usando un polinomio de Taylor de order

Figura 2.24:

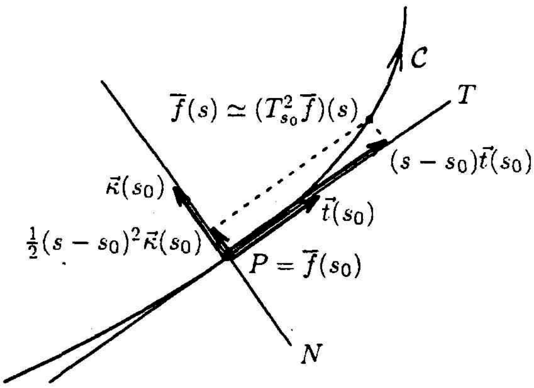

Figura 2.25:

2 en la vecindad del punto de parametro s_0, tenemos

$$\begin{aligned}\overline{f}(s) &\simeq \overline{f}(s_0) + (s-s_0)\overline{f}^{'}(s_0) + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\overline{f}^{''}(s_0)\\ &= \overline{f}(s_0) + (s-s_0)\overrightarrow{t}(s_0) + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\overrightarrow{k}(s_0)\end{aligned}$$

Si $\overline{f}^{''}(s_0) \neq 0$, eso significa que para s vecino de s_0, la proyección de $\overrightarrow{\overline{f}(s_0)\overline{f}(s)}$ sobre la normal es de mismo sentido que $\overline{f}^{''}(s_0)$: entonces, el vector de curvatura es orientado en el sentido de la concavidad de la curva.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea C un arco orientado con una representación parametrica normal $\overline{f} : I \to R^2$ de clase C^2. Vamos a llamar curvatura (escalar) de C la función $\kappa : I \to R$ tal que $\overrightarrow{k} = \kappa\overrightarrow{n}$. Si la curvatura no es cero, el radio de curvatura es el inverso de su valor absoluto, lo notaremos ρ.

Asi, tenemos

- $\kappa = \pm \left\| \overrightarrow{k} \right\|$
- $\kappa = (\overrightarrow{k}|\overrightarrow{n}) = \left[\overrightarrow{t}, \overrightarrow{k}\right]$
- si $\kappa \neq 0, \rho = 1/|\kappa| = 1/\left\| \overrightarrow{k} \right\|$

Si $\kappa \neq 0$, el punto de la normal, del lado de la concavidad del arco, situado a una distancia ρ del punto corriente es llamado **centro de curvatura** y puede escribirse como

$$C \equiv P + \rho^2\overrightarrow{k} = P + \frac{1}{\kappa}\overrightarrow{n}$$

El circulo centrado en este punto y de radio ρ es llamado **circulo osculator** , es el circulo que se acerca lo mejor a la curva en la vecindad del punto considerado.

Si cambiamos la orientación del arco, el vector tangente cambia de sentido y en consecuencia, también el vector normal. El vector de curvatura no es cambiado por que su sentido es el sentido de la concavidad de la curva. En consecuencia, la curvatura escalar cambia de signo pero ni el radio de curvatura, ni el centro de curvatura ni el circulo osculator son afectados.

El cambio de signo de la curvatura escalar corresponde a la observación que cuando percorremos un camino,lo que es una curva derecha para ir se transforma en curva izquierda por el regreso.

Es posible de dar una caracterización del centro de curvatura que puede ayudar a dar otra luz sobre la noción de curvatura .

Proposición:

el centro de curvatura de un arco regular de clase C^2 es el limite del punto de intersección de dos normales vecinas.

No vamos a demostrar este teorema pero recomendamos al lector a tratar de hacerlo.

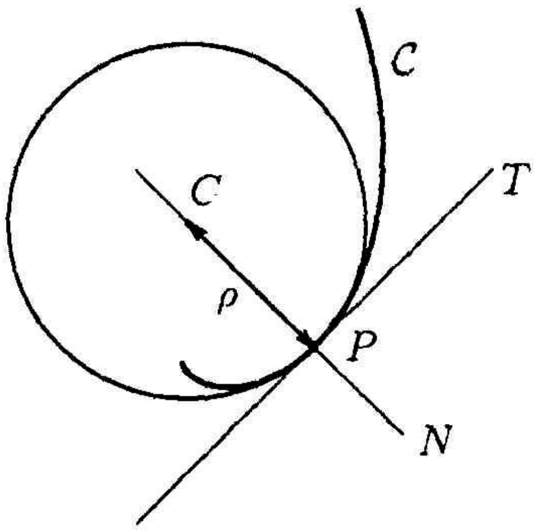

Figura 2.26:

2.8.3 Formulas de Frenet.

Por definición , tenemos $\overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n}$, entonces, tenemos

$$\overrightarrow{n}' = -\kappa \overrightarrow{t}$$

En resumen, tenemos

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' = -\kappa \overrightarrow{t} \end{cases}$$

Esas relaciones son las formulas de Serret-Frenet planas y puede reescribir como

$$(\overrightarrow{t}', \overrightarrow{n}') = (\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}). \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$$

2.8.4 La evoluta.

El lugar de los centros de curvatura de una curva C es una nueva curva D llamada la evoluta de C. C es también llamada la involuta de D.

Sea una representación parametrica normal $\overline{f} : I \to \mathcal{E}$ de C, la evoluta D de la curva C es entonces representada por

$$g \equiv \overline{f} + \frac{1}{\kappa} \overrightarrow{n} : I \to R^2$$

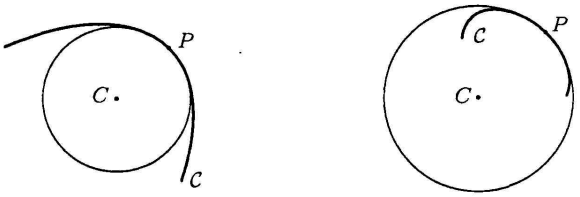

Figura 2.27:

y usando las relaciones de Serret-Frenet, tenemos

$$g' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}\overrightarrow{n}$$

La evoluta tiene dos propiedades importantes:

Proposición:

Sea C un arco plano de clase C^2 con curvatura no-cero, la evoluta de C es la envolvente de la familia de las normales a C.

Proposición:

Sea C un arco plano de clase C^3 con curvatura monotona y no-cero. La longitud de un arco de la evoluta de C entre dos puntos es igual a el valor absoluto de la diferencia de los radios de curvatura de C en los puntos correspondiente.

La demostración la dejamos como ejercicio.

Usamos hasta ahora el hipotesis que la curvatura es monotona. De una manera, eso es la situación general. En un punto en la vecindad del cual la curvatura es creciente , el arco entra en su circulo osculator y si la curvatura es decreciente, el arco sale de su circulo osculator. En absencia de información sobre la orientación, el arco pasa a traves de su circulo osculator.

En un punto donde la curvatura pasa por un maximo, el arco queda localmente al exterior del circulo osculator. Y queda a dentro en un punto que es un minimo de la curvatura. Los puntos en cuales la curvatura es extremal son llamados vertices del arco. A un vertice de la curva corresponde a un retroceso de su evoluta.

Teorema de los cuatros vertices:

Cualquier curva cerrada convexa de clase C^2 tiene al menos 4 vertices.

2.8.5 Calculo práctico de la curvatura.

Sea f una representación parametrica de clase C^2. Entonces, $\overline{f} = f \circ \sigma^{-1}$ es una representación parametrica normal. Usando los resultados anteriores que

$$\overrightarrow{t} = \overline{f}' = \frac{f'}{\|f'\|} \circ \sigma^{-1}$$

En otro termino, tenemos

$$f^{'} = (\overrightarrow{t} \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|$$

entonces,

$$\begin{aligned} f^{''} &= (\overrightarrow{t}^{'} \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^2 + (\overrightarrow{t} \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^{'} \\ &= (\overrightarrow{n} \circ \sigma)(\kappa \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^2 + (\overrightarrow{t} \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^{'} \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \left[f^{'}, f^{''}\right] &= \left[(\overrightarrow{t} \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|, (\overrightarrow{n} \circ \sigma)(\kappa \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^2 + (\overrightarrow{t} \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^{'}\right] \\ &= \left[(\overrightarrow{t} \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|, (\overrightarrow{n} \circ \sigma)(\kappa \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^2\right] \\ &= \left(\left(\left[\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}\right].\kappa\right) \circ \sigma\right) \left\| f^{'} \right\|^3 \\ &= (\kappa \circ \sigma) \left\| f^{'} \right\|^3 \end{aligned}$$

Sea

$$\kappa = \frac{\left[f^{'}, f^{''}\right]}{\left\| f^{'} \right\|^3} \circ \sigma^{-1}$$

O si f_1 y f_2 son las coordenados de f en una referencia ortonormal directa,

$$\kappa = \frac{f_1^{'} f_2^{''} - f_2^{'} f_1^{''}}{\left\| f^{'} \right\|^3} \circ \sigma^{-1}$$

2.9 Curvas espaciales (triedro de Frenet)

Esta sección va a ser dedicada a las curvas espaciales es decir las curvas en el espacio euclidiano tridimensional orientado $E_+^3(R)$.

El vector curvatura de tal curva se defino de manera analago al caso de curvas planas:

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea C un arco espacial, con $\overline{f} : R \to R^3$ como representación parametrica normal de clase C^2. Llamamos vector de curvatura de C la derivada del vector tangente $\overrightarrow{t}$, es decir el vector $\overrightarrow{k} = \overline{f}^{''}$.

Notamos que si cambiamos la orientación, $\overrightarrow{t}$ cambio de signo y s cambio de signo. Entonces, $\overrightarrow{k}$ queda igual. Pero, contrariamente al caso de las curvas planas, no podemos definir el vector normal exigiendo que $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$ sea una base ortonormal directa. De hecho, $\overrightarrow{k}$ es un vector ortogonal a $\overrightarrow{t}$ como este es de norma constante. Ademas, en la vecindad del punto de abscisa curvilinea s_0, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{f}(s) &\simeq \overline{f}(s_0) + (s - s_0)\, \overline{f}^{'}(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\, \overline{f}^{''}(s_0) \\ &\simeq \overline{f}(s_0) + (s - s_0)\, \overrightarrow{t}(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\, \overrightarrow{k}(s_0) \end{aligned}$$

Suponemos que $\overrightarrow{k}(s_0) \neq 0$, entonces, al orden 2, $\overline{f}(s)$ esta en el plano determinado por el punto $\overline{f}(s_0)$ y los dos vectores directores $\overrightarrow{t}(s_0)$ y $\overrightarrow{k}(s_0)$. Este plano es llamado **plano osculator a** C **en** $\overline{f}(s_0)$ y es un plan que localmente "contiene" lo mas la curva.

Si $\overrightarrow{k} \neq 0$, de todos los vectores unitarios ortogonales a $\overrightarrow{t}$, es natural de escoger como **vector normal** el vector $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k} / \left\| \overrightarrow{k} \right\|$. Si definimos $\kappa = \left\| \overrightarrow{k} \right\|$ que es la **curvatura escalar**, tenemos $\overrightarrow{k} = \kappa \overrightarrow{n}$ y $\kappa = (\overrightarrow{k} | \overrightarrow{n})$. Es importante de notar que la curvatura espacial es siempre positiva, por definición. La recta determinada por el punto $\overline{f}$ y el vector director $\overrightarrow{n}$ es llamado **normal principal a** C en el punto considerado.

Para reperar la dirección del plan osculator, podemos usar un vector normal a este plan. A este fin, introducimos el vector $\overrightarrow{b}$ definido de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{n}$$

que vamos a llamar **vector binormal**. La recta determinada por el punto $\overline{f}$ y el vector director $\overrightarrow{b}$ es llamado la **binormal a** C en el punto considerado.

El triplet de vectors $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$ es llamado el **triedro de Frenet** (o de Serret-Frenet) de la curva o también el triedro movil. Podemos adicionar a este triplet el punto corriente $\overline{f}$ sobre C para obtener **la referencia movil (o referencia de Serret-Frenet)** $(\overline{f}\,; \overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$. La tangente , la normal principal la binormal son los ejes de coordenadas de esta referencia.

Vamos a decir ahora unas palabras del caso de curvatura nula. Eso puede pasarse por un punto o sobre todo un intervalo.

<u>Proposición:</u>
Un arco es un segmento de recta si y solamente si su curvatura es nula en cada punto.

Cuando la curvatura se anula en un punto, no hay ningun razon "geometrica" para escoger como vector normal uno o un otro de la infinidad de vectores unitarios ortogonales al vector tangente. El único criterio que podemos usar es de naturaleza diferente: vamos a tratar de definir un vector normal que sea, como se puede, una función continua. Los siguientes ejemplos van a dar una idea de lo que es posible y de lo que no es posible.

<u>Ejemplos:</u>

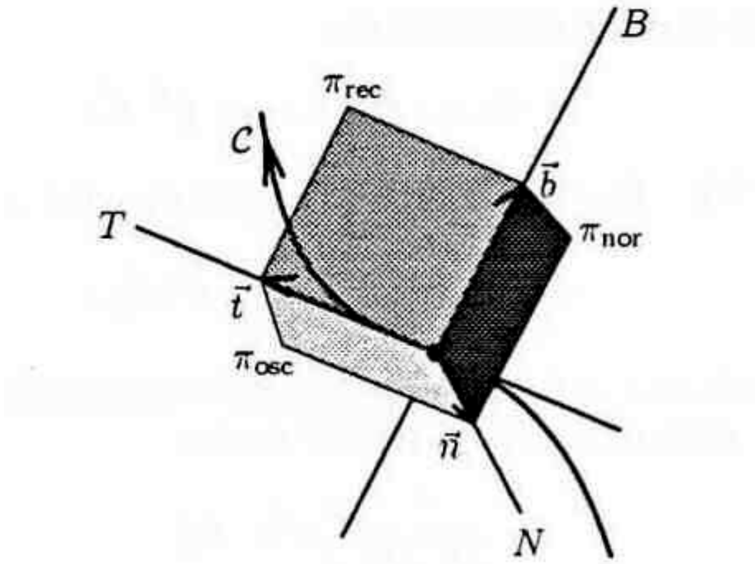

Figura 2.28:

1. Sea C el arco orientado representado por

$$k : R \to R^3 : t \to (t, \frac{1}{3}t^3, 0)$$

Como $k^{'}(t) = (1, t^2, 0)$, el vector tangent en el punto $k(t)$ es

$$\overrightarrow{t}(\sigma(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(1, t^2, 0)$$

C es un arco plano. Usando las convenciones de los paragrafos anteriores, tenemos como vector normal:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(-t^2, 1, 0)$$

Pero cuando vemos C como un arco espacial, el vector normal tiene que ser dirigido en el sentido de la concavidad: entonces, tenemos

$$\overrightarrow{n}(\sigma(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(-t^2, 1, 0) & t > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}(t^2, -1, 0) & t < 0 \end{cases}$$

Para $t = 0$, es decir el origen, la curvatura se anula (para justificarlo mejor esperar las herramientas al fin de esta sección), entonces, el vector normal no puede ser calculado normando el vector de curvatura y como ademas, tenemos

$$\lim_{t\to O^+} \overrightarrow{n}(\sigma(t)) = (0,1,0) \neq (0,-1,0) = \lim_{t\to O^-} \overrightarrow{n}(\sigma(t))$$

Asi es imposible de definir $\overrightarrow{n}(\sigma(0))$ por continuidad.

2. Sea

$$\overline{f} : R \to R^3 :$$

$$s \to \left(\frac{1}{2}\left(s + \int_0^s \cos t^3 dt\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^s \sin t^3 dt, \frac{1}{2}\left(s - \int_0^s \cos t^3 dt\right)\right)$$

Esta aplicación es una representación parametrica de arco de clase C^∞ visto que para culaquier s,

$$\overline{f}' = \left(\frac{1}{2}\left(1+\cos s^3\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s^3, \frac{1}{2}\left(1-\cos s^3\right)\right)$$

Entonces,

$$\left\|\overline{f}'(s)\right\| = 1$$

lo que significa que $\overline{f}$ es una representación normal. Entonces,

$$\overrightarrow{k}(s) = \overline{f}'' = \left(-\frac{3}{2}s^2\sin s^3, \frac{3}{\sqrt{2}}s^2\cos s^3, \frac{3}{2}s^2\sin s^3\right)$$

y

$$\kappa(s) = \frac{3}{\sqrt{2}}s^2$$

La curvatura se anula en $s = 0$. En este punto, el vector tangente es $(1,0,0)$ pero como

$$\overrightarrow{n}(s) = \frac{\overrightarrow{k}(s)}{\kappa(s)}$$
$$= (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s^3, \cos s^3, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin s^3)$$
$$\lim_{s\to 0}\overrightarrow{n}(s) = (0,1,0)$$

Asi podemos completar la definición de $\overrightarrow{n}(s)$ en $s = 0$ por

$$\overrightarrow{n}(0) = (0,1,0)$$

2.9.1 Torsión

Una curvatura de $E_+^3(R)$ en general no es contenida en un plan. Su plan osculator cambia con el punto corriente.

Deseamos "medir" la manera de distinguir una curva izquierda de una curva derecha. Vamos a hacerlo estudiando las variaciones del plano osculator o mas sencillamente del vector binormal que determina su dirección. El parametro usando va a ser el abscisa curvilinea.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea C un arco espacial orientado, con $\overline{f} : I \to R^3$ una representación parametrica normal de clase C^3. Llamamos vector torsión de C la derivada del vector binormal $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{b}'$.

Como $\overrightarrow{b}$ es un vector constante en norma, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{\tau}$. Ademas, tenemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\tau} &= \overrightarrow{b}' \\
&= (\overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{n})' \\
&= \overrightarrow{t}' \wedge \overrightarrow{n} + \overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{n}' \\
&= \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{n} + \overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{n}' \\
&= \overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{n}'
\end{aligned}$$

por que $\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{n}$ son paralelos. Entonces, $\overrightarrow{t} \perp \overrightarrow{\tau}$ y los vectores ($\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{\tau}$) son paralelos. Ademas, tenemos

$$\overrightarrow{\tau} = -\tau \overrightarrow{n}$$

donde τ es una función escalar llamada **torsion de la curva**. Otra manera de definirlo es

$$\tau = -(\overrightarrow{\tau} | \overrightarrow{n})$$

Hay que notar que la torsión puede ser positiva como negativa. El signo $-$ fue introducido para que el signo de la torsion de la helice circular:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

($a > 0$) sea el signo de b. Asi los tornillos o los sacacorchos ordinarios son de torsion positiva.

Notas:

Como $(\overrightarrow{b} | \overrightarrow{n}) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= (\overrightarrow{b} | \overrightarrow{n})' \\
&= (\overrightarrow{\tau} | \overrightarrow{n}) + (\overrightarrow{b} | \overrightarrow{n}')
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau = -(\overrightarrow{\tau} | \overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{b} | \overrightarrow{n}')$$

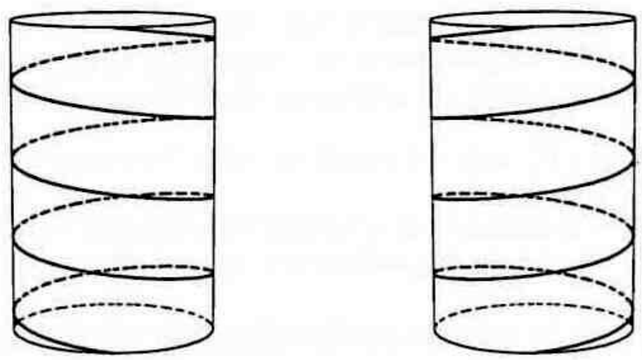

Figura 2.29: Primera figura representa una helice izquierda $b < 0$ (torsión negativa)y la segunda figura (a la derecha) representa una helice derecha ($b > 0$) (torsión positiva

Las formulas de Serret-Frenet expresan las derivadas de los tres vectores del triedro local:

$$\begin{cases} \overrightarrow{t}' = \kappa \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}' = -\kappa \overrightarrow{t} + \tau \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b}' = -\tau \overrightarrow{n} \end{cases}$$

O sobre forma matricial:

$$(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})' = (\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

2.9.2 Proyecciones de la curva sobre los planos del triedro movil.

Consideramos, sobre una curva C de clase C^3 un punto P_0 en cual ninguno de la curvatura o de la torsion se anula. Podemos suponer que C es representada por una representación parametrica normal $\overline{f}$ y tal que $\overline{f}(s_0) = P_0$. Vamos a acercarnos de $\overline{f}$ usando su polinomios de Taylor de orden 3 en s_0. Por eso, primero, podemos notar que

$$\begin{aligned} \overline{f}''' &= \overrightarrow{k}' = (\kappa \overrightarrow{n})' \\ &= \kappa' \overrightarrow{n} + \kappa(-\kappa \overrightarrow{t} + \tau \overrightarrow{b}) \\ &= -\kappa^2 \overrightarrow{t} + \kappa' \overrightarrow{n} + \kappa\tau \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

Y para facilitar las notaciones, vamos notar $\overrightarrow{t_0} = \overrightarrow{t}(s_0)$. Asi para s cerca de s_0,

$$\begin{aligned}
\overline{f}(s) &\simeq \overline{f}(s_0) + (s-s_0)\overline{f}^{'}(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2}\overline{f}^{''}(s_0) + \frac{(s-s_0)^3}{6}\overline{f}^{'''}(s_0) \\
&= P + (s-s_0)\overrightarrow{t_0} + \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0\overrightarrow{n_0} + \frac{(s-s_0)^3}{6}\left(-\kappa_0^2\overrightarrow{t_0} + \kappa_0^{'}\overrightarrow{n_0} + \kappa_0\tau_0\overrightarrow{b_0}\right) \\
&= P + \left((s-s_0) - \kappa_0^2\frac{(s-s_0)^3}{6}\right)\overrightarrow{t_0} + \\
&\left(\frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0 + \kappa_0^{'}\frac{(s-s_0)^3}{6}\right)\overrightarrow{n_0} + \frac{(s-s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0\overrightarrow{b_0} \\
&\simeq P + (s-s_0)\overrightarrow{t_0} + \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0\overrightarrow{n_0} + \frac{(s-s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0\overrightarrow{b_0}
\end{aligned}$$

si nos limitamos al termino dominante en el coeficiente de cada vector. Llamamos f^* la ultima approximación,

$$f^*(s) \equiv P + (s-s_0)\overrightarrow{t_0} + \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0\overrightarrow{n_0} + \frac{(s-s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0\overrightarrow{b_0}$$

Trabajamos en la referencia de Frenet $\mathcal{R}^{'} = (P_0; \overrightarrow{t_0}, \overrightarrow{n_0}, \overrightarrow{b_0})$ y notamos $x^{'}, y^{'}$ y $z^{'}$ las coordenadas en esta referencia. En tal caso, la expresión de f^* puede reescribirse como

$$_{\mathcal{R}^{'}}f^*(s) = \begin{pmatrix} s-s_0 \\ \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0 \\ \frac{(s-s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0 \end{pmatrix}$$

Localmente, alrededor de P la curva C^* representada por f^* es una buena aproximación de C.

- Notamos C_{osc} la proyección de C sobre su plano osculator en P. Esta proyección coincide de muy cerca con la proyección C^*_{osc} de C^* sobre el plano osculator que admite como representación parametrica:

$$f^*_{osc} : R \to R^3 : s \to f^*_{osc}(s) \equiv P + (s-s_0)\overrightarrow{t_0} + \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0\overrightarrow{n_0}$$

Usando otras palabras, tenemos que C^*_{osc} es descrita en $\mathcal{R}^{'}$ por

$$\begin{pmatrix} x^{'} = s - s_0 \\ y^{'} = \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0 \\ z^{'} = 0 \end{pmatrix}$$

o también por las ecuaciones implicitas:

$$\begin{cases} y^{'} = \frac{1}{2}\kappa_0 x^{'2} \\ z^{'} = 0 \end{cases}$$

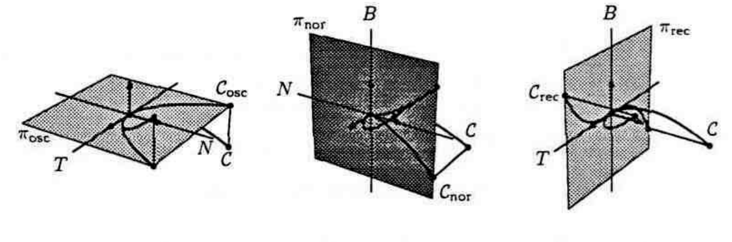

Figura 2.30:

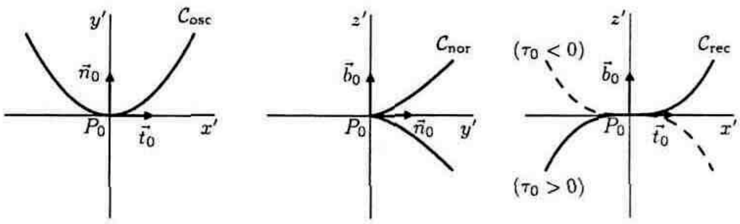

Figura 2.31:

- Notamos C_{nor} la proyección de C sobre su plan normal en P. Esta proyección coincide de muy cerca con la proyección C^*_{nor} de C^* sobre el plano normal que admite como representación parametrica:

$$f^*_{nor} : R \to R^3 : s \to f^*_{nor}(s) \equiv P + \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0\overrightarrow{n_0} + \frac{(s-s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0\overrightarrow{b_0}$$

Usando otras palabras, tenemos que C^*_{nor} es descrita en $\mathcal{R}'$ por

$$\begin{pmatrix} x' = 0 \\ y' = \frac{(s-s_0)^2}{2}\kappa_0 \\ z' = \frac{(s-s_0)^3}{6}\kappa_0\tau_0 \end{pmatrix}$$

o también por las ecuaciones implicitas:

$$\begin{cases} y'^3 = \frac{9}{2}\frac{\kappa_0}{\tau_0}z'^2 \\ x' = 0 \end{cases}$$

2.9.3 Calculo práctico de la curvatura y de la torsión.

En la pratica, las curvas no son siempre dadas por sus representaciones normales. Vamos a ver como expresar la curvatura y la torsión a partir de una representación parametrica f cualquiera de clase C^3.

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{f}\circ\sigma \\
f^{'} &= (\overline{f}^{'}\circ\sigma).\left\|f^{'}\right\| \\
&= (\overrightarrow{t}\circ\sigma).\left\|f^{'}\right\| \\
f^{''} &= (\overrightarrow{t}^{'}\circ\sigma).\left\|f^{'}\right\|^{2}+(\overrightarrow{t}\circ\sigma).\left\|f^{'}\right\|^{'} \\
&= (\overrightarrow{n}\circ\sigma).(\kappa\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{2}+(\overrightarrow{t}\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{'} \\
f^{'''} &= (\overrightarrow{n}^{'}\circ\sigma)(\kappa\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3}+(\overrightarrow{n}\circ\sigma).(\kappa^{'}\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3}+ \\
& \quad 2(\overrightarrow{n}\circ\sigma).(\kappa\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|.\left\|f^{'}\right\|^{'}+(\overrightarrow{t}^{'}\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{'}.\left\|f^{'}\right\|+(\overrightarrow{t}\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{''} \\
&= -(\overrightarrow{t}\circ\sigma)(\kappa\circ\sigma)^{2}\left\|f^{'}\right\|^{3}+(\overrightarrow{b}\circ\sigma).(\kappa\circ\sigma)(\tau\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3}+ \\
& \quad (\overrightarrow{n}\circ\sigma).(\kappa^{'}\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3}+3(\overrightarrow{n}\circ\sigma).(\kappa\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|.\left\|f^{'}\right\|^{'}+(\overrightarrow{t}\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{''} \\
&= (\overrightarrow{t}\circ\sigma)\left(\left\|f^{'}\right\|^{''}-(\kappa\circ\sigma)^{2}\left\|f^{'}\right\|^{3}\right)+ \\
& \quad (\overrightarrow{n}\circ\sigma).\left((\kappa^{'}\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3}+3(\kappa\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|.\left\|f^{'}\right\|^{'}\right)+ \\
& \quad (\overrightarrow{b}\circ\sigma)(\kappa\circ\sigma)(\tau\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
f^{'}\wedge f^{''} &= (\overrightarrow{b}\circ\sigma).(\kappa\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3} \\
\left\|f^{'}\wedge f^{''}\right\| &= (\kappa\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{3} \\
&\Rightarrow (\kappa\circ\sigma)=\frac{\left\|f^{'}\wedge f^{''}\right\|}{\|f^{'}\|^{3}}
\end{aligned}
$$

Finalmente, tenemos

$$
\kappa=\frac{\left\|f^{'}\wedge f^{''}\right\|}{\|f^{'}\|^{3}}\circ\sigma^{-1}
$$

Ademas, tenemos

$$
\begin{aligned}
\left[f^{'},f^{''},f^{'''}\right] &= (f^{'}\wedge f^{''}|f^{'''}) \\
&= (\kappa\circ\sigma)^{2}(\tau\circ\sigma)\left\|f^{'}\right\|^{6} \\
&= \left\|f^{'}\wedge f^{''}\right\|^{2}(\tau\circ\sigma)
\end{aligned}
$$

de tal manera que tenemos por la torsión:

$$(\tau \circ \sigma) = \frac{\left[f', f'', f'''\right]}{\|f' \wedge f''\|^2}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\left[f', f'', f'''\right]}{\|f' \wedge f''\|^2} \circ \sigma^{-1}$$

Como consecuencia de esos resultados, tenemos los dos propiedades siguientes:

Proposición:

la curvatura es nula si y solamente si f' *y* f'' *son linealmente independiente.*

Proposición:

Si la curvatura no es nula, el plan osculator admite f' *y* f'' *como vectores directores.*

Capitulo 3

Superficie

De la misma manera que nuestra intuición inicial de una curva es un pedazo de recta real, deformada y sumergida en un espacio euclidiano, vamos esencialmente pensar las superficies como pedazos del plan R^2 etirados, curvados y torcidos... Es decir que las superficies van a estar estudiadas via representaciones parametricas.

Como en el capitulo anterior, vamos a distinguir las propiedades afines de las superficies (como la noción de curvas trazadas sobre una superficie , plan tangent, ...) y las propiedades metricas (area de una porción de superficie, la primera forma fundamental y los multiples aspectos de la curvatura).

Al final de este capitulo, vamos a describir dos categorias de superficies particulares pero muy importantes para las aplicaciones: superficies arregladas y superficies de revolución.

3.1 Definiciones

Antes de todo, tenemos que definir las partes de R^n destinadas a jugar, en un espacio de dimensión cualquiera, el papel de los intervalos abiertos de la linea real.

Definición:

Una parte $U \subseteq R^n$ es llamada conexa si y solamente si cada vez que $U_1, U_2 \subseteq R^n$ son abiertos disjuntos tales que $U_1 \cup U_2 \supseteq U$, sea $U_1 \supseteq U$ y $U_2 = \emptyset$, sea $U_2 \supseteq U$ y $U_1 = \emptyset$.

Notas:

1. el "sea...sea..." excluye $U = \emptyset$ de los conexos.

2. el marco natural de esta definición es un curso de topologia general. La idea de base es que un abierto conexo es "de uno solo pedazo". Por ejemplo, en R^2 , R^2 el mismo, $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, $]-1,1[\times]-1,1[$ son conexos. $R^* \times R$ o $D_+ \cup D_-$ no lo son (si $D_\pm$ designo el disco abierto de radio 1 y de

centro $(\pm 2, 0)$). De hecho, en el primer caso, podemos tomar $U_1 = R^*_- \times R$ y $U_2 = R^*_+ \times R$. En el segundo caso, podemos tomar $U_{1,2} = D_\pm$.

Proposición:
Una parte abierta de R es conexa si y solamente si esta parte es un intervalo no-vacio.

Proposición:
Un abierto U es conexo si y solamente si dos cualquiera de sus puntos son ligados por una linea rota contenida en U.

Ahora vamos a dar las definiciones de superficies que son praticamente una copia de las definiciones correspondientes para las curvas. Sea E un espacio afin real y sea k un número intero.

Definición:
Sea U y V dos abiertos de R^2,$\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^k si φ es biyectiva y si φ y φ^{-1} son de clase C^k.

Definición:
Una representación parametrica de una sabana[1] de clase C^k en E es una aplicación $f : U \to \mathcal{E}$ inyectiva y de clase C^k con U un abierto conexo de R^2.

Definición:
Dos representaciones parametricas de sabana de clase C^k en E, $f : U \to \mathcal{E}$ y $g : V \to \mathcal{E}$ son dichas equivalentes en clase C^k si existe un difeomorfismo de clase C^k,$\varphi : U \to V$ tal que $f = g \circ \varphi$.

Definición:
Una superficie de clase C^k en E es una clase de equivalencia de representaciones parametricas de sabana de clase C^k en E por la equivalencia en clase C^k.

Definición:
Una representación parametrica de superficie de clase C^k en E es una aplicación $f : U \to \mathcal{E}$ donde U es un abierto no-vacio de R^2 tal que para cada $(u, v) \in U$, existe un abierto conexo $U_{(u,v)}$ tal que $(u, v) \in U_{(u,v)} \subseteq U$ y que $f_{U_{(u,v)}}$ es una representación parametrica de sabana de clase C^k en E.

Definición:
Dos representaciones parametricas de superficies de clase C^k en E, $f : U \to \mathcal{E}$ y $g : V \to \mathcal{E}$ son dichas equivalentes en clase C^k si existe un difeomorfismo de clase C^k $\varphi : U \to V$ tal que $f = g \circ \varphi$.

Notas:
Es un poco fastidioso de repetir definiciones tan cerca a las definiciones del capitulo anterior. De hecho, podriamos integrar todas esas nociones en una noción mas general, la noción de variedad de dimensión n de clase C^k en un espacio afin real: $n = 1$ para una curva y $n = 2$ para una superficie. Preferimos evitarlo para que el discurso no sea demasiado abstracto desde el inicio.

[1] otro termino que puede usarse en lugar de sabana es "hoja de superficie".

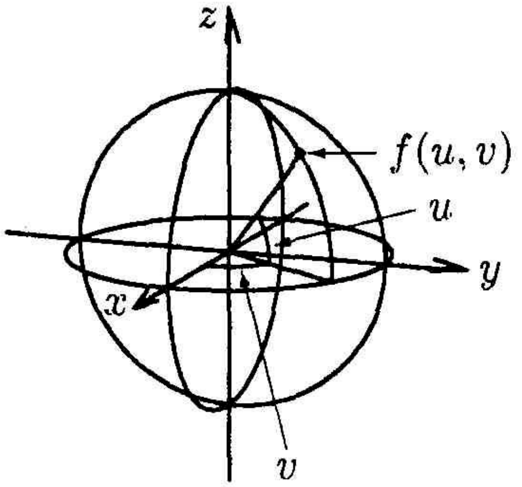

Figura 3.1:

Ejemplos:

1. La paraboloïda hiperbolica $Q \equiv z = x^2 - y^2$. Para obtener una representación parametrica, lo mas sencillo es de tomar x y y por parametros. Asi obtenemos:

$$f : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u, v, u^2 - v^2)$$

y es una representación parametrica de sabana de clase C^∞.

2. Para representar la esfera de radio R centrado en el origen, queremos usar :

$$f : R^2 \to R^3 : (u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

Pero para obtener el polo Norte N deberiamos dar a f argumentos $u = \pi/2 + 2k\pi$ $(k \in Z)$ y v cualquiera. Pero f no es inyectiva sobre ningun vecindad de tal punto. Asi no va a ser posible de esta manera de representar la esfera con una representación parametrica de sabana.

Pero,

$$f_1 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times]-\pi, \pi[\to R^3 :$$
$$(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$$

es inyectiva y representa la esfera privada de un meridian que pasa por

$(-R, 0, 0)$. De misma manera,

$$f_2 : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times]-\pi, \pi[\to R^3 :$$
$$(u, v) = (-R\cos u \cos v, R\sin u, R\cos u \sin v)$$

es inyectiva y representa la esfera privada del arco del ecuator que va de $(0, -R, 0)$ a $(0, R, 0)$. Entonces,

$$f^* : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times (]-2\pi, 0[\cup]0, 2\pi[) \to R^3 :$$
$$(u, v) \to \begin{cases} f_1(u, v + \pi) & v < 0 \\ f_2(u, v - \pi) & v > 0 \end{cases}$$

es una representación parametrica de superficie describiendo toda la esfera.

3. Otra representación parametrica de superficie describiendo la esfera es :

$$g^* : R^* \times R \to R^3 :$$
$$(u, v) \to \left(\frac{2\ln|u|}{\ln^2|u| + v^2 + 1}, \frac{2v}{\ln^2|u| + v^2 + 1}, sgn(u)\frac{\ln^2|u| + v^2 - 1}{\ln^2|u| + v^2 + 1} \right)$$

la restricción de g a $R_+^* \times R$ (resp. $R_-^* \times R$) es una representación parametrica de sabana de la esfera privado del polo norte (resp. polo sur).

4. El cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ deberia poder representarse por

$$f : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u\cos v, u\sin v, u)$$

Pero esta función no es inyectiva, entonces no es una representación parametrica de sabana. Pero la pregunta es de saber si es una representación parametrica de superficie. Si $u_0 > 0$,el punto (u_0, v_0) admite una vecindad abierto conexo $R_+^* \times]v_0 - \pi, v_0 + \pi[$ sobre cual la restricción de f es inyectiva. De la misma manera si $u_0 < 0$. Pero cerca del punto $(0, v_0)$ no podemos encontrar una vecindad abierta sobre cual la restricción de f sea inyectiva. En conclusión, f no puede ser una representación parametrica de superficie. Para representar la sabana superior, de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, lo mas sencillo es de tomar x y y como parametros, es decir usar la representación parametrica de sabana:

$$g_+ : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u, v, \sqrt{v^2 + u^2})$$

De la misma manera , para la sabana inferior, tenemos como representacion parametrica de sabana:

$$g_- : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u, v, -\sqrt{v^2 + u^2})$$

Para representar todo el cono, una solución es de combinar $g_\pm$:

$$g : R^* \times R \to R^3 :$$
$$(u, v) \to (\ln|u|, v, sgn(u)\sqrt{\ln^2|u| + v^2}$$

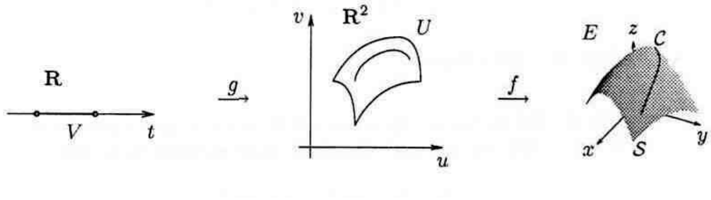

Figura 3.2:

como el dominio de g no es conexo, no es una representación parametrica de sabana pero es solamente una representación parametrica de superficie. Ademas, g no es derivable, entonces es una representación parametrica de superficie de clase C^0.

3.2 Curvas sobre una superficie

Sea una superficie S representada por $f : U \to \mathcal{E}$. Para trazar una curva C sobre S, podemos primero trazar el abierto U de R^2, via $g : V \to U$ donde V es un abierto de R y despues considerar la composición: $f \circ g : V \to \mathcal{E}$.

Definición:

la curva representada por $h : V \to \mathcal{E}$ es dicha trazada sobre la superficie representado por $f : U \to \mathcal{E}$ si existe $g : V \to U$ tal que $h = f \circ g$.

Notas:

1. si tenemos cambios de parametros (difeomorfismos) φ tal que $f = \widetilde{f} \circ \varphi$ y ψ tal que $h = \widetilde{h} \circ \psi$,entonces definiendo

$$\widetilde{g} \equiv \varphi \circ g \circ \psi^{-1} \tag{3.1}$$

tenemos

$$\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = h \circ \psi^{-1} = \widetilde{h}$$

la noción de curva trazada sobre una superficie no dependie entonces de las representaciones parametricas. Asi podemps reexpresar la relación (3.1) usando el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow^{g} & U \\ \downarrow \psi & & \downarrow \varphi \\ \widetilde{V} & \longrightarrow^{\widetilde{g}} & \widetilde{U} \end{array}$$

A notar que este diagrama es conmutativo.

2. Si f es una representación parametrica de sabana, para una representación parametrica h de curva trazada sobre la sabana, la función g tal que

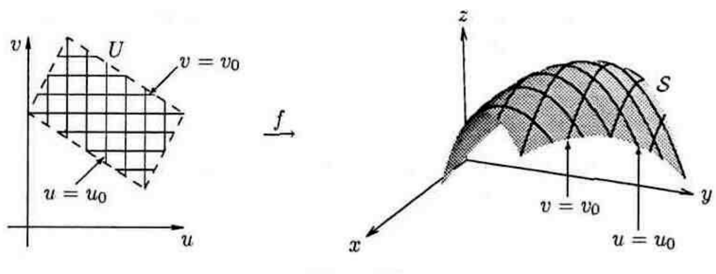

Figura 3.3:

$h = f \circ g$ es unica. De hecho, una aplicación $f : U \to X$ es inyectiva si y solamente si para cualquier aplicaciones $g, g' : V \to U$,

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$$

3.2.1 Coordenadas curvilineas.

Parmi todas las curvas trazadas en el abierto U, hay en particular las curvas u =constante que admite representaciones parametricas de la siguiente forma:

$$g_{u_0} : I_{u_0} \to U : t \to (u_0, t)$$

donde u_0 es fijo y $I_{u_0} \equiv \{t \in R : (u_0, t) \in U\}$. Haciendo la composición de esas representaciones parametricas con una representaciones parametricas de superficie $f : U \to \mathcal{E}$, obtenemos **las curvas de parametros v (o curvas de coordenadas curvilineas o curvas u =constante)**.

La curva de parametro v correspondiendo a $u = u_0$ admite entonces como representación parametrica:

$$f \circ g_{u_0} : I_{u_0} \to \mathcal{E} : t \to f(u_0, t)$$

Podemos hacer igual con el otro parametro.

El punto $f(u, v)$ de la sabana representada por $f : U \to \mathcal{E}$ es a veces llamada punto de coordenadas curvilineas (u, v).

Ejemplos:

1. En el caso de

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times R \to R^3 :$$
$$(u, v) \to (R\cos u \cos v, R\cos u \sin v, R\sin u)$$

que representa la esfera de radio R centrada en el origen, privada de sus dos polos, las curvas de parametros v son representaciones parametricas de la forma:

$$\begin{array}{r} f \circ g_{u_0} : R \to R^3 \\ t \to (R \cos u_0 \cos t, R \cos u_0 \sin t, R \sin u_0) \end{array}$$

son los paralelos. Las curvas de parametros u que tienen como representaciones parametricas:

$$\begin{array}{r} f \circ k_{v_0} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\to R^3 : \\ t \to (R \cos t \cos v_0, R \cos t \sin v_0, R \sin t) \end{array}$$

son los meridianos.

2. Para representar el grafico de una función de dos variables, otramente dicho la superficie G_f de ecuación $z = f(x, y)$ en $E^3(R)$ lo mas sencillo es de tomar x y y como parametros. Asi obtenemos la representación parametrica:

$$\overline{f} : dom\ f \to R^3 : (u, v) \to (u, v, f(u, v))$$

Un tal representación parametrica es dicha representación parametrica de Monge. Las curvas de coordenadas son sencillamente las secciones de G_f por los planos paralelos a Oxz de una parte y a Oyz de otra parte.

3.3 Planos tangentes

Sea S una sabana de clase C^1 en E, representada por $f : U \to \mathcal{E}$ y sea $P = f(u_0, v_0)$ un punto de S.

Sea C un arco de clase C^1 trazado sobre S pasando por P, C es representado por $h = f \circ g$ con $g : I \to U$ donde I es un intervalo abierto de R. Como P es un punto de C, existe $t_0 \in I$, tal que $g(t_0) = (u_0, v_0)$.

Nos interesamos a la tangente a C en P. Su dirección es determinada por el vector director:

$$\begin{aligned} h^{'}(t_0) &= (f \circ g)^{'}(t_0) \\ &= \partial_1 f(g(t_0)).g_1^{'}(t_0) + \partial_2 f(g(t_0)).g_2^{'}(t_0) \end{aligned}$$

Este vector director es una combinación lineal de $\partial_1 f(u_0, v_0)$ y $\partial_2 f(u_0, v_0)$. Si esos dos ultimos vectores son linealmente independientes, van a determinar la dirección del plano π que contiene la tangente a C en P. Como esto razonamiento puede ser usado para cualquier curva regular trazada sobre S y pasando por P, podemos afirmar que las tangentes a todas esas curvas son contenidas en el plano π. Por eso, este plano va a llamarse **plano tangente a S en P**.

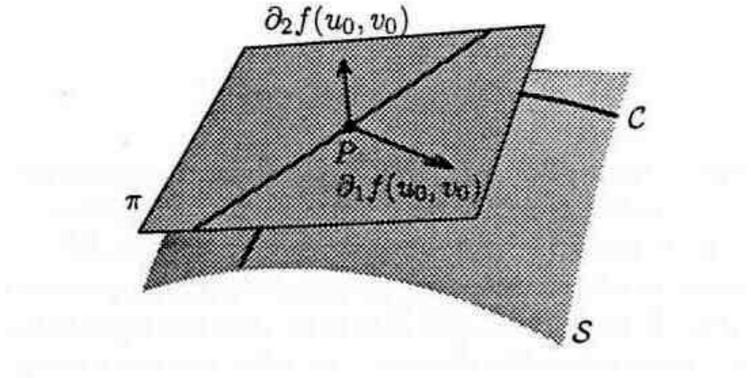

Figura 3.4:

Primero, vamos a averiguar que esta definición no depiende de la representación parametrica.

Sea $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \mathcal{E}$ una representación parametrica de clase C^1 de la sabana S, equivalente a f en clase C^1 via el cambio de parametros $\varphi : U \to \widetilde{U}$:

$$f = \widetilde{f} \circ \varphi$$

Asi, si $(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0) = \varphi(u_0, v_0)$,

$$\begin{cases} \partial_1 f(u_0, v_0) = \partial_1 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0).\partial_1 \varphi_1(u_0, v_0) + \partial_2 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0).\partial_1 \varphi_2(u_0, v_0) \\ \partial_2 f(u_0, v_0) = \partial_2 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0).\partial_2 \varphi_1(u_0, v_0) + \partial_2 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0).\partial_2 \varphi_2(u_0, v_0) \end{cases}$$

En otro termino,

$$Jf(u_0, v_0) = J\widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0).J\varphi(u_0, v_0)$$

donde

$$Jf \equiv \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}$$

es la matriz jacobiana de f.

Como el cambio de parametros es biyectivo, $J\varphi$ es una matriz regular, lo que hay como consecuencia que $\partial_1 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ y $\partial_2 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ son linealmente independientes si y solamente si $\partial_1 f(u_0, v_0)$ y $\partial_2 f(u_0, v_0)$ son linealmente independientes. Ademas, $\partial_1 f(u_0, v_0)$ y $\partial_2 f(u_0, v_0)$ de una parte, y $\partial_1 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ y $\partial_2 \widetilde{f}(\widetilde{u}_0, \widetilde{v}_0)$ de otra parte, engendran el mismo plano vectorial. Asi la definición siguiente tiene sentido:

Definición:

Un punto de sabana de clase C^1 en un espacio afin real E es dicho regular si en este punto, las derivadas parciales de la representación parametrica son linealmente independiente. Un punto no-regular es dicho singular. Una sabana es dicha regular si es de clase C^1 y si todos sus puntos son regulares.

Ejemplos:

El plano de ecuación $z = z_0$ de $A^3(R)$ puede ser representado en clase C^1 por

$$f : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u + v, v^3, z_0)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u,v) &= (1,0,0) \\ \partial_2 f(u,v) &= (1,3v^2,0) \end{aligned}$$

Esos vectores son siempre diferentes de cero y son linealmente independientes si y solamente si $v \neq 0$. Los puntos $f(u, 0) = (u, 0, z_0)$ es entonces singulares.

Pero es claro que este plan admite igualmente la representación parametrica siguiente

$$g : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u, v, z_0)$$

que es de clase C^1 al menos y es facil de averiguar que g es regular. Entonces, f y g no son equivalente en clase C^1, lo que puede verificarse facilmente pero son equivalente en clase C^0.

Definición:

El plano tangente a una sabana S de clase C^1 en un punto regular P es el plano afin pasando por este punto y paralelo a las derivadas parciales de una representación parametrica, lo notamos $T_P S$. Cualquier vector perteneciendo a las direcciones de este plano son declarado vectores tangente a la sabana en el punto dado.

Ejemplos:

1. la paraboloida hiperbolica de ecuación: $z = x^2 - y^2$ admite la representación

   $$f : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u, v, u^2 - v^2)$$

   que es una representación parametrica de sabana de clase C^∞. Entonces, tenemos

   $$\begin{aligned} \partial_1 f(u,v) = (1,0,2u) \\ \partial_2 f(u,v) = (0,1,2v) \end{aligned}$$

   que son dos vectores linealmente independientes para cualquier valor de (u, v), entonces, cualquier punto de la paraboloida hiperbolica es regular. En el punto de parametro (a, b), el plan tangente tiene como ecuaciones parametricas

   $$: \left\{ \begin{array}{c} x = a + u \\ y = b + v \\ z = a^2 - b^2 + 2au - 2bv \end{array} \right.$$

   y de ecuación cartesiana:

   $$z = 2ax - 2by - a^2 + b^2$$

2. La hiperboloida tiene una sabana de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ admite como representación parametrica de superficie de clase C^∞:

$$f : R^2 \to R^3 :$$
$$(u, v) \to (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$$

Hallamos

$$\partial_1 f(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$$
$$\partial_2 f(u, v) = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos u, 0)$$

Es facil de convincerse que esos dos vectores son linealmentes independientes para cualquier valores de u y v. Con eso podemos calcular facilmente la ecuación parametrica del plano tangente en el punto de parametros (u, v).

Proposición:
Sea P un punto regular de una sabana S de clase C^1, las tangentes a P (P punto regular de S) a todas las curvas de clase C^1 trazadas sobre S son contenidas en el plano tangente a S en P.

Notas:
Como caso particular, es importante de notar que , en el punto de parametro (u_0, v_0),

- el vector $\partial_1 f(u_0, v_0)$ es un vector director de la tangente a la curva $v = v_0$.
- el vector $\partial_2 f(u_0, v_0)$ es un vector director de la tangente a la curva $u = u_0$.

Ahora vamos a dar un lema tecnico que va a ser util en el futuro:

Lema:
Sea P un punto regular de una sabana S de clase C^1. Para cualquier vector w tangente a S en P, existe una curva trazada sobre S representada por h de clase C^1 tal que $h(0) = P$ y $h^{'}(0) = w$.

3.3.1 Orientación.

Sea $\varphi : U \to V$ un cambio de parametros de clase C^1. Tenemos entonces la siguiente matriz jacobiana de φ:

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_2\varphi_1 \\ \partial_1\varphi_2 & \partial_2\varphi_2 \end{pmatrix}$$

y como recuedramos en la sección anterior, esta matriz es regular en cualquier punto de U. Vamos a decir que φ **preserva la orientación (resp. invertir la orientación)** si y solamente si $\det(J\varphi) > 0$(resp. $\det(J\varphi) < 0$).

Ejemplos:

1. La biyección $\varphi : R_+^* \times R \to R^2 : (u, v) \to (\ln u, v)$ preserva su jacobiano. De hecho, su jacobiana es igual a

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1/u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su determinante es strictamente positivo sobre el dominio de definición de φ.

2. El intercambio de parametros es realisado por la biyección:

$$\varphi : U \to V : (u, v) \to (v, u)$$

que es un cambio de parametros de clase C^∞. La matriz jacobiana es

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de determinante igual a -1. Este cambio de parametros invertio la orientación.

Definición:

Dos representaciones parametricas de sabana de clase C^1 en E , $f : U \to \mathcal{E}$ y $g : V \to \mathcal{E}$ son equivalentes y de misma orientación si existe un cambio de parametros preservando la orientación tal que $\varphi : U \to V : f = g \circ \varphi$.

Definición:

Una sabana orientada de clase C^1 es una clase de equivalencia de representación parametrica de sabana en clase C^1 por la relación "ser equivalente y de la misma orientación".

Sea entonces, $f : U \to \mathcal{E}$ y $g : V \to \mathcal{E}$ dos representaciones parametricas regulares y equivalentes en clase C^1 via $\varphi : f = g \circ \varphi$. En esta condición, tenemos

$$Jf = (Jg \circ \varphi).J\varphi$$

Entonces, la matriz jacobiana es la matriz de cambio de base de la base Jg a la base Jf :

$$J\varphi =_{(Jg\circ\varphi)} (I)_{Jf}$$

Asi podemos escribir la siguiente proposición:

Proposición:

Sea $f : U \to \mathcal{E}$ y $g : V \to \mathcal{E}$ dos representaciones parametricas de una sabana en E equivalente en clase C^1. Esas dos representaciones parametricas son de misma orientación (resp. de orientación opuesta) si y solamente si las bases Jf y Jg de la dirección del plano tangente son de misma orientación (resp. de orientación opuesta).

3.4 Área

El problema de la definición de la area de una sabana mas dificil de lo que parece. Hasta el XIX siglo, la opinión estubo que estubo suficiente de considerar el limite del area de una superficie poliedrica inscrita, haciendo tender a cero los lados de las diferentes caras, de manera analoga a lo que se hecho para definir la longitud de un arco. Pero en 1880, Schwarz enseño un contra-ejemplo. Fue finalmente Lebesgue en su tesis de doctorado que resolvio este problema (1902).

En pratica, para el calculo del area, vamos a usar la siguiente proposición que vamos a admitir sin demostración:

Proposición:

Sea S una sabana representada por $f : U \to R^3$, de clase C^1. En esas condiciones, podemos calcular la area de S si y solamente si

$$\iint_U \|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|$$

converge y en este caso, la area de S es igual a el valor del integral.

Ejemplo:

la función

$$\begin{array}{rcl} f & : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\pi, \pi\right[\to R^3 : \\ (u, v) & \to & (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u) \end{array}$$

representa la esfera de radio R centrada en el origen. Tenemos

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 f(u, v) & = & (-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u) \\ \partial_2 f(u, v) & = & (-R \cos u \sin v, R \cos u \cos u, 0) \end{array}$$

Y entonces,

$$\|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\| =$$

$$\begin{array}{rl} = & \left\|(-R^2 \cos^2 u \cos v, -R^2 \cos^2 u \sin v, -R^2 \sin u \cos u)\right\| \\ = & R^2 \cos u \end{array}$$

La integral doble de la proposición vale entonces

$$\int_{-\pi/2 < u < \pi/2} \int_{-\pi < v < \pi} \|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\| = 4\pi R^2$$

3.5 Vector normal

Si S es una sabana regular orientada dada por una representación parametrica f de clase C^1, los vectores $\partial_1 f$ y $\partial_2 f$ son tangentes a S, entonces, el vector

$\partial_1 f \wedge \partial_2 f$ es en cada punto de S normal al plano tangente a S. El vector unitario correspondiente :

$$\overrightarrow{u} \equiv \frac{\partial_1 f \wedge \partial_2 f}{\|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|}$$

no depiende de la representación parametrica escogida (en la misma orientación que f). Este vector se llama **vector normal a** S.

Hay que notar que si cambiamos la orientación escogida por la orientación opuesta, el vector normal es cambiado por su opuesto. Escoger una orientación de una sabana regular es entonces igualmente escoger un vector normal unitario en cada punto de la sabana, este vector normal es una función continua de los parametros.

Cuando en lugar de trabajar sobre la sabana, trabajamos sobre una superficie, una tal elección puede no ser posible. Si tal elección es posible, vamos a decir que la superficie es orientable. Dos ejemplos famosos de superficies no-orientable son la cinta de Möbius y la botella de Klein que tienen en los dos casos solamente una cara.

3.6 Primera forma fundamental

Sea S una sabana regular. Si queremos estudiar arcos trazados sobre S, es claro que podemos usar las tecnicas que vimos en el capitulo anterior, es decir ignorar completamente que esos arcos estan trazados sobre S. Pero probablemente no es el acercamiento lo mas adecuado.

Sea $f : U \to R^3$. una representación parametrica de S de clase C^1. Consideramos un arco C trazado sobre S representado por $h = f \circ g$ donde $g : I \to U$ es de clase C^1.

Sea dos puntos $a < b$ de I . Vimos en el capitulo anterior que la longitude del arco C entre los puntos $A = h(a)$ y $B = h(b)$ es igual a

$$\begin{aligned} L &= \int_I \left\| h' \right\| \\ &= \int_I \left\| (f \circ g)' \right\| \\ &= \int_I \left\| (\partial_1 f \circ g).g_1' + (\partial_2 f \circ g).g_2' \right\| \end{aligned}$$

La función a integrar es entonces la norma del vector tales que sus componentes, en la base $Jf \circ g$ de la dirección del plan tangente son g_1' y g_2'. En general, esta base no es ortonormal. Si nos recuedemos que

$$(u|v) = ({}_e u)^t . G_e . {}_e v$$

donde G_e es la matriz representando el producto escalar en la base e :

$$G_e = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n|e_1) & \cdots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}$$

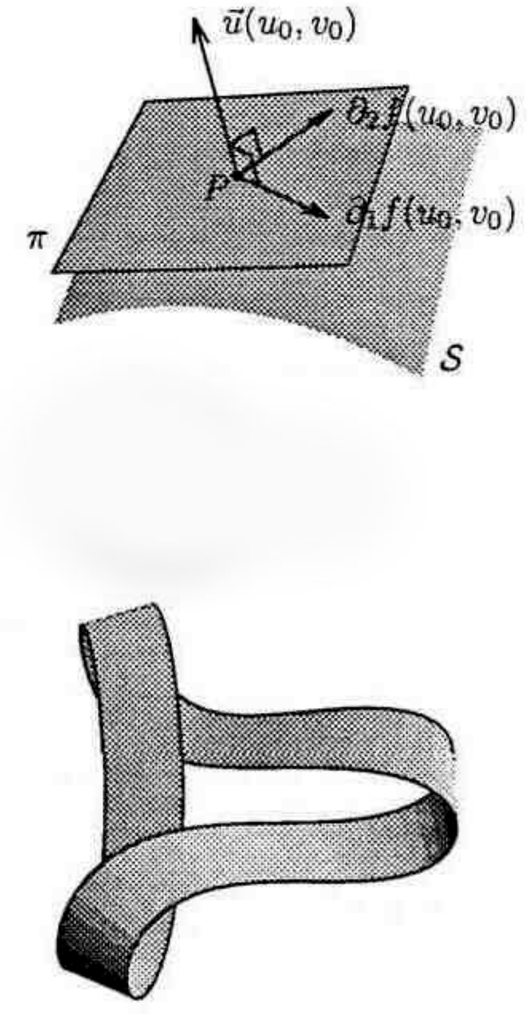

Figura 3.5:

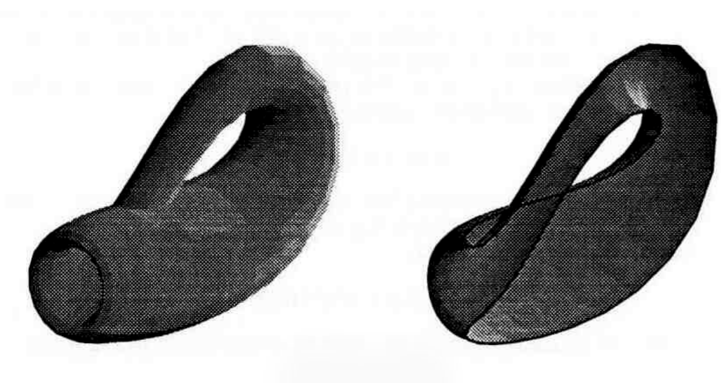

Figura 3.6: cinta de Möbius y la botella de Klein

Entonces, aqui tenemos,

$$\left\|(f\circ g)'\right\| = \sqrt{\left(g_1'\ g_2'\right).\left(\begin{pmatrix} (\partial_1 f|\partial_1 f) & (\partial_1 f|\partial_2 f) \\ (\partial_2 f|\partial_1 f) & (\partial_2 f|\partial_2 f) \end{pmatrix}\circ g\right).\begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \end{pmatrix}}$$

y

$$L = \int_I \sqrt{\left(g_1'\ g_2'\right).\left(G_{Jf}\circ g\right).\begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \end{pmatrix}}$$

Y si introducimos la matriz,

$$G_{Jf} = \begin{pmatrix} (\partial_1 f|\partial_1 f) & (\partial_1 f|\partial_2 f) \\ (\partial_2 f|\partial_1 f) & (\partial_2 f|\partial_2 f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Los tres elementos E, F, G son los productos escalares, dos a dos , de las derivadas parciales de la representación parametrica. Asi es importante de notar que no son constantes pero son funciones definidas sobre U.

Naturalemente, G_{Jf}, matriz del producto escalar, es positiva y definida y entonces su determinante es strictamente positivo:

$$\det G_{Jf} = EG - F^2 > 0$$

Ademas, esta expresión admite una interpretación geometrica interesante: de hecho, el determinante de G_{Jf} es el determinante de Gram de Jf. Entonces, tenemos

$$\det G_{Jf} = \|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|^2$$

Entonces, podemos reescribir la definición del vector normal sobre la forma:

$$\overrightarrow{u} \equiv \frac{\partial_1 f \wedge \partial_2 f}{\sqrt{EG - F^2}}$$

y el integral doble para dar el area de un pedazo de superficie como

$$\int\int_U \sqrt{EG - F^2}$$

$\boxed{\text{Definición:}}$

La primera forma fundamental en un punto de S es la forma cuadratica asociada a la forma bilineal simetrica obtenida restringiendo el producto escalar de $E^3(R)$ a la dirección del plano tangente a S en P.

La dirección π_0 del plano tangente π es el sub-espacio vectorial de R^3 engendrado por $\partial_{1,2} f$. En este base, la restricción a π_0 del producto escalar de $E^3(R)$ es representada por la matriz G_{Jf}.

Si las componentes en la base $(\partial_1 f, \partial_2 f)$ de un vector tangente son $(\alpha, \beta)^t$, el imagen de este vector por la primera forma fundamental es entonces,

$$(\alpha\ \beta) G_{Jf}(u,v) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = E(u,v)\alpha^2 + 2F(u,v)\alpha\beta + G(u,v)\beta^2$$

que vamos a notar

$$I_{(u,v)}(\alpha, \beta).$$

Usualmente notamos esas componentes $(\alpha, \beta)^t$ como $(du, dv)^t$ y de omitir los argumentos (u, v). Asi la siguiente notación es muy comun:

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Consideramos ahora una segunda representación parametrica de S: $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to R^3$ equivalente a f via el cambio de parametro φ (es decir que $f = \widetilde{f} \circ \varphi$. Sea $\widetilde{E} = (\partial_1 \widetilde{f} | \partial_1 \widetilde{f}), \widetilde{F} = \partial_1 \widetilde{f} | \partial_2 \widetilde{f})$ y $\widetilde{G} = (\partial_2 \widetilde{f} | \partial_2 \widetilde{f})$ y

$$G_{J\widetilde{f}} = \begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix}$$

entonces, tenemos

$$Jf = (J\widetilde{f} \circ \varphi).J\varphi$$

Otramente dicho, $J\varphi$ es la matriz de cambio de base de $J\widetilde{f} \circ \varphi$ hasta Jf. En consecuencia, las matrices G_{Jf} y $G_{J\widetilde{f}}$ representando el producto escalar de esas bases son relacionados por

$$G_{Jf} = (J\varphi)^t.(G_{J\widetilde{f}} \circ \varphi).J\varphi$$

3.7 Curvatura normal (triedro de Darboux, segunda forma fundamental)

Sea C una sabana regular orientada, representada por $f : U \to R^3$ de clase C^2. Sea C un arco, trazado sobre S representado por $h = f \circ g$ con $g : I \to U$ de clase C^2.

En el capitulo anterior, vimos como hallar la curvatura de C como arco espacial pero es también importante de estudiar la curvatura de C como arco trazado sobre S.

Consideramos de hecho alguien caminando derecho en frente de el, en linea recta. Como el se esta moviendo sobre la tierra que suponemos aqui esferica, su trayectoria no puede ser una linea recta: es en realidad un gran circulo.

Como el movimiento puede aparecer rectilinea? Es que la tierra es tan poco curvada que la asimilamos a su plan tangente en el punto donde estamos. Cuando decimos que nos muevemos en linea recta es que nuestra trayectoria no tiene curvatura en el plano tangente.

Cuando estudiamos un arco trazado sobre una sabana, parece entonces interesante de descomponer su curvatura en una componente en la dirección del plan tangente (su **curvatura geodesica**) y una componente en la direccion de la normal (su **curvatura normal**). Ahora vamos a estudiar esta ultima.

Definición:

Si C es un arco regular de clase C^2 trazado sobre una sabana regular orientada de clase C^2, la curvatura normal de C es el producto escalar del vector de curvatura de C y del vector normal a S.

Sea f, una representación parametrica de S y $h = f \circ g$ una representación parametrica de C. Asi, tenemos

$$\kappa_n \equiv (\overrightarrow{k} \circ \sigma | \overrightarrow{u} \circ g)$$

donde σ es la abscisa curvilinea:

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| h' \right\|$$

para un tiempo t_0.

Si cambiamos de orientación de S, el vector normal cambia de sentido y entonces la curvatura normal cambia de signo.

Como el vector normal es unitario, la proyección ortogonal de $\overrightarrow{k} \circ \sigma$ sobre $\overrightarrow{u} \circ g$ es dada $\text{proy}_{\overrightarrow{u} \circ g} = \kappa_n(\overrightarrow{u} \circ g)$. Ademas, tenemos

$$\kappa_n = \left\| \overrightarrow{k} \circ \sigma \right\| . \left\| \overrightarrow{u} \circ g \right\| \cos(\overrightarrow{k} \circ \sigma, \overrightarrow{u} \circ g) = (\kappa \circ \sigma) \cos \alpha$$

si α es el ángulo entre $\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{u}$. Como esos dos vectores son ortogonales al vector tangente a C, este ángulo es el complementario (o el opuesto del complementario) del ángulo ω entre el plan tangente a S y el plan osculator de C. Entonces, tenemos

$$\kappa_n = \pm(\kappa \circ \sigma) \sin \omega$$

En particular si el plan osculator es normal a la superficie, lo que es el caso cuando consideramos una sección normal de la superficie,

$$\kappa_n = \pm(\kappa \circ \sigma)$$

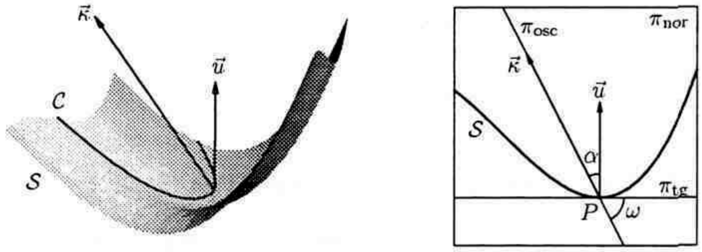

Figura 3.7:

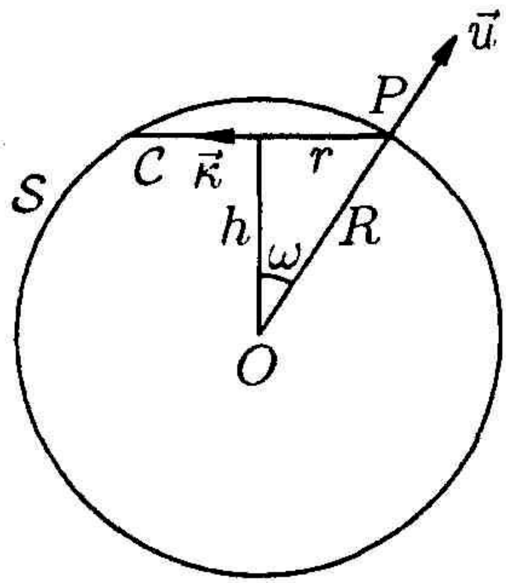

Figura 3.8:

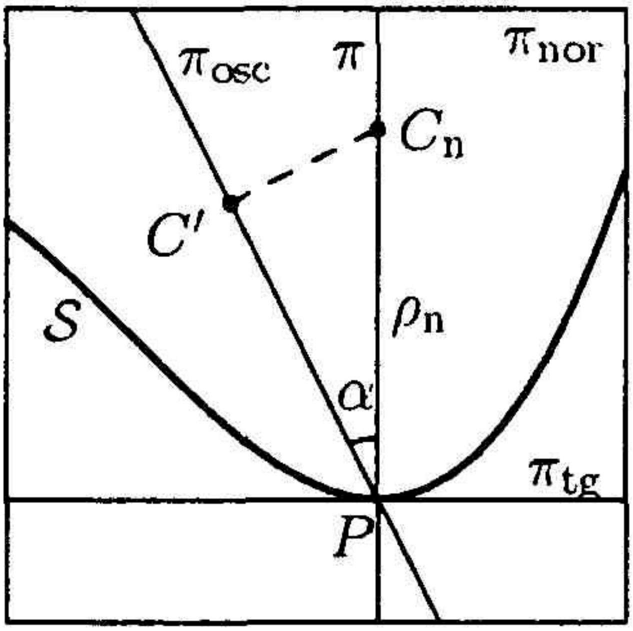

Figura 3.9:

Ejemplo:
Sea la esfera S de radio R centrado en O. Consideramos el circulo C de intersección de S y de un plan distante de h del punto O. Notamos r el radio de C: entonces, por el teorema de Pythagoras, tenemos $h^2 + r^2 = R^2$. Ademas, en cualquier punto de C, tenemos $\kappa = 1/r$. Orientamos S tomando el vector normal dirigida en dirección exterior. Entonces, $\sin \omega = r/R$ y $\kappa_n = -1/R$: los circulos trazados sobre S tienen todos la misma curvatura normal.

Consecuencia (teorema de Meusnier):
El centro de curvatura de un arco trazado sobre una sabana es la proyección sobre el plano osculator del centro de curvatura de la sección normal teniendo la misma tangente de arco.

3.7.1 Triedro de Darboux-Ribaucour.

Un segundo acercamiento posible de la curvatura normal es la siguiente: Nos plazamos en un punto regular P de un arco C trazado sobre S. Suponemos que C admite la representación normal $\overline{h} = f \circ \overline{g}$ donde $f : U \to R^3$ es una representación de S y $\overline{g} : I \to U$ son de clase C^2. Eso significa que para cualquier $s \in I$,

$$I_{\overline{g}(s)}(\overline{g}_1^{'}(s), \overline{g}_2^{'}(s)) = 1.$$

Conocemos en P el triedro de Frenet $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$ de C. Desafortunamente, si este triedro es perfectamente adaptado al estudio intrinseca de C, no lo es si vemos C como arco trazado sobre S. Mas precisamente , el vector tangente a C es también un vector tangente a S, asi podemos conservaro. Pero, en el plano normal a $C, \overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{b}$ no tiene ningun relación con S. Cambiamos $\overrightarrow{b}$ por $\overrightarrow{u} \circ g$, el vector normal a S que es normado y ortogonal a $\overrightarrow{t}$ y despues definimos el vector $\overrightarrow{g} = (\overrightarrow{u} \circ g) \wedge \overrightarrow{t}$ de tal manera que $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{u} \circ g)$ sea una base ortonormal directa, exactamente como el triedro de Frenet. Este base se llama **triedro de Darboux o de Darboux-Ribaucour.**

La donación del vector $\overrightarrow{t}$ que es ortogonal al plano normal a C lo orienta: el sentido directo es tal que una rotación de $+\pi/2$ aplica $\overrightarrow{n}$ sobre $\overrightarrow{b}$ (y $\overrightarrow{g}$ sobre $\overrightarrow{u} \circ g$). Podemos dar un signo al ángulo ω, correspondiendo al sentido de la rotación aplicando $\overrightarrow{n}$ sobre $\overrightarrow{g}$ (y $\overrightarrow{b}$ sobre $\overrightarrow{u} \circ g$); asi $\alpha = \omega + \pi/2$ y podemos precisar la relación anterior sobre la curvatura normal:

$$\kappa_n = -\kappa \sin \omega$$

Las formulas de cambio de base entre el triedro de Frenet F y el triedro de Darboux se escriben:

$$\left\{ \begin{array}{rc} \overrightarrow{t} = & \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{g} = & \cos\omega \overrightarrow{n} + \sin\omega \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{u} \circ g = & -\sin\omega \overrightarrow{n} + \cos\omega \overrightarrow{b} \end{array} \right.$$

O de otra manera,

$$D = F.\Omega$$

donde

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Podemos observar que

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

Sabemos ademas que $F^{'} = F.A$ donde A es la matriz antisimetrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar la matriz B tal que $D^{'} = D.B$:

$$\begin{aligned} D^{'} &= (F\Omega)^{'} = F^{'}\Omega + F\Omega^{'} \\ &= FA\Omega + F\Omega^{'} \\ &= F(A\Omega + \Omega^{'}) \\ &= D\Omega^{-1}(A\Omega + \Omega^{'}) \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa\cos\omega & \kappa\sin\omega \\ \kappa\cos\omega & 0 & -(\tau+\omega^{'}) \\ -\kappa\sin\omega & (\tau+\omega^{'}) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Podemos reconocer la curvatura normal de C sobre S en el elemento $(3,1)$ de B. Los elementos $(2,1)$ y $(3,2)$ son llamados respectivamente **curvatura geodesica y torsión geodesica**:

$$\begin{aligned} \kappa_g &\equiv \kappa\cos\omega \\ \tau_g &\equiv (\tau+\omega^{'}) \end{aligned}$$

La curvatura geodesica vamos a estudiarla en una proxima sección. La torsión geodesica parece no tener interpretación "geometrica" evidente.

3.7.2 Segunda forma fundamental.

Buscamos ahora una expresión analitica para la curvatura normal. Sea como siempre, $\overline{h} = h\circ\sigma^{-1}$ una representación parametrica normal de C donde $\sigma(t) = \int_{t_0}^{t}\left\|h^{'}\right\|$ es la expresión del abscisa curvilinea al largo de C, una origen $h(t_0)$ y una orientación escogida para C. Entonces,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{k} &= \overline{h}^{''} = (h\circ\sigma^{-1})^{''} \\ &= \left((h^{'}\circ\sigma^{-1}).(\sigma^{-1})^{'}\right)^{'} \\ &= (h^{''}\circ\sigma^{-1}).(\sigma^{-1})^{'2} + (h^{'}\circ\sigma^{-1})(\sigma^{-1})^{''} \end{aligned}$$

El segundo termino es un multiple del vector tangente a C, entonces, es ortogonal al vector normal $\overrightarrow{u} \circ g \circ \sigma^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \left(\overrightarrow{k} | \overrightarrow{u} \circ g \circ \sigma^{-1}\right) \\
&= \left((h^{''} \circ \sigma^{-1}).(\sigma^{-1})^{'2} | \overrightarrow{u} \circ g \circ \sigma^{-1}\right) \\
&= (\sigma^{-1})^{'2} \left(h^{''} | \overrightarrow{u} \circ g\right) \circ \sigma^{-1} \\
&= \frac{1}{(\sigma' \circ \sigma^{-1})^2} \left(h^{''} | \overrightarrow{u} \circ g\right) \circ \sigma^{-1} \\
&= \frac{\left(h^{''} | \overrightarrow{u} \circ g\right)}{\sigma^{'2}} \circ \sigma^{-1} \\
&= \frac{\left(h^{''} | \overrightarrow{u} \circ g\right)}{\|h'\|^2} \circ \sigma^{-1}
\end{aligned}$$

en función del parametro inicial t, eso puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\kappa_n \circ \sigma &= \frac{\left(h^{''} | \overrightarrow{u} \circ g\right)}{\|h'\|^2} \\
&= \frac{\left((f \circ g)^{''} | \overrightarrow{u} \circ g\right)}{\left\|(f \circ g)^{'}\right\|^2}
\end{aligned}$$

Usando el resultado de la subsección anterior, el denominator de esta fracción vale

$$I_{g(-)}(g_1^{'}, g_2^{'})$$

Ademos, como tenemos

$$(f \circ g)^{'} = (\partial_1 f \circ g).g_1^{'} + (\partial_2 f \circ g).g_2^{'}$$

podemos deducir que

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{''} &= (\partial_1^2 f \circ g).g_1^{'2} + 2(\partial_1 \partial_2 f \circ g).g_1^{'}.g_2^{'} + (\partial_2^2 f \circ g).g_2^{'2} + \\
&\quad (\partial_1 f \circ g).g_1^{''} + (\partial_2 f \circ g).g_2^{''}
\end{aligned}$$

Como los dos ultimos terminos son paralelos al plano tangente, tenemos

$$\left((f \circ g)^{''} | \overrightarrow{u} \circ g\right) = (L \circ g).g_1^{'2} + 2(M \circ g).g_1^{'}.g_2^{'} + (N \circ g).g_2^{'2}$$

donde introducimos las abreviaciones clasicas L, M y N definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
L &\equiv \left(\partial_1^2 f | \overrightarrow{u}\right) \\
M &\equiv \left(\partial_1 \partial_2 f | \overrightarrow{u}\right) \\
N &\equiv \left(\partial_2^2 f | \overrightarrow{u}\right)
\end{aligned}$$

A notar que como $(\partial_1 f|\overrightarrow{u}) = 0$, tenemos

$$\left(\partial_1^2 f|\overrightarrow{u}\right) + (\partial_1 f|\partial_1 \overrightarrow{u}) = \partial_1((\partial_1 f|\overrightarrow{u})) = 0$$

lo que nos da otra expresión para L:

$$\begin{array}{rcl} L & = & -\left(\partial_1 f|\partial_1 \overrightarrow{u}\right) \\ M & = & -\left(\partial_1 f|\partial_2 \overrightarrow{u}\right) = -\left(\partial_2 f|\partial_1 \overrightarrow{u}\right) \\ N & = & -\left(\partial_2 f|\partial_2 \overrightarrow{u}\right) \end{array}$$

Esas 4 igualdades son conocidas como **formulas de Weingarten**.

Introducimos la segunda forma fundamental:

$$II_{(u,v)}(a,b) = L(u,v)a^2 + 2M(u,v)ab + N(u,v)b^2$$

o de manera mas tradicional

$$II_{(u,v)}(du,dv) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)du.dv + N(u,v)dv^2$$

Y finalmente tenemos,

$$\kappa_n \circ \sigma = \frac{II_{g(-)}(g_1^{'}, g_2^{'})}{I_{g(-)}(g_1^{'}, g_2^{'})}$$

En particular, en un punto $P = f(g(t_0))$ con $g(t_0) = (u_0, v_0)$ y $s_0 = \sigma(t_0)$:

$$\kappa_n(s_0) = \frac{II_{(u_0,v_0)}(g_1^{'}(t_0), g_2^{'}(t_0))}{I_{(u_0,v_0)}(g_1^{'}(t_0), g_2^{'}(t_0))}$$

Sea C^* un otra curva trazada sobre S pasando por P y tal que la tangente en este punto coincide con la tangente de C. Asi C^* es representado por $h^* = f \circ g^*$ con $g^*(t_0^*) = (u_0, v_0)$ y decir que C^* y C tienen la misma tangente en el punto P, es decir que los vectores $(g_1^{'}(t_0), g_2^{'}(t_0))$ y $(g_1^{*'}(t_0^*), g_2^{*'}(t_0^*))$ son paralelos: entonces existe k tal que

$$(g_1^{'}(t_0), g_2^{'}(t_0)) = k.(g_1^{*'}(t_0^*), g_2^{*'}(t_0^*))$$

Es facil de hallar la curvatura normal de C^* en P y obtenemos el resultado:

$$\kappa_n^*(s_0^*) = \kappa_n(s_0)$$

Asi dos arcos trazados sobre una misma superficie con un punto comun y en este punto la misma tangente, tienen la misma curvatura normal. O para decirlo de manera diferente, la curvatura normal es un punto no depiende de la curvatura trazada sobre la superficie pero solamente de su dirección. Entonces, podemos expresar la siguiente definición:

Definición:

Sea S una sabana orientada, regular, de clase C^2 y P un punto de S. La curvatura normal de S en P en la dirección del vector tangente w es la curvatura normal en P de cualquier curva regular de clase C^2 trazada sobre S, con tangente en P paralela a w.

Su expresión es

$$\kappa_n(w) = \frac{II_{(u_0,v_0)}(a,b)}{I_{(u_0,v_0)}(a,b)}$$

donde (u_0, v_0) son las coordenadas curvilineas de P y (a, b) son las componentes de w en la base de las derivadas parciales.

De todos las curvas trazadas sobre S, pasando por P y tangentes al vector w, podemos usar en particular la sección C_w de S por el plan (normal) $\prod_w$ pasando por P y paralelo a los vectores $\overrightarrow{u}$ y w. Como es una curva plana contenida en $\prod_w$, su plan osculator es $\prod_w$ mismo y el ángulo ω entre este plano osculator y el plano tangente a S en P es $\omega = \pi/2$.

Entonces, la curvatura normal de S en la dirección w es la curvatura de C_w en P (o su opuesto dependiendo de la orientación escogida por S). La curva C_w sección de S por un plano normal es llamado **sección normal**.

3.7.3 Curvas asintoticas.

Definición:

Sea S una superficie regular de clase C^2 y C una curva trazada sobre S. Vamos a decir que C es una curva asintotica de S si su curvatura normal es nula en todos sus puntos. Una dirección asintotica es una dirección en el plano tangente en cual la curvatura es nula.

Ejemplos:

1. Si una superficie contiene una linea recta, la curvatura de este es cero, su curvatura lo es también. Entonces, esta linea recta es una curva asintotica de la superficie. Por ejemplo, sobre las cuadras doblemente arreglada como hiperboloïda a una sabana o paraboloïda hiperbolica, en cada punto, tienen dos direcciones asintoticas que son las de los dos generatoras.

2. Consideramos la "helicoïdal" representada por:

$$f : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u \cos v, u \sin v, v)$$

Cada curva $u = u_0$ es una helice circular (degenerada en una derecha si $u_0 = 0$) y su dirección, en el plano tangente es $\partial_2 f$, con componentes en la base Jf $(0, 1)$. La curvatura normal de tal helice sobre el helicoïdal es entonces:

$$\kappa_n(0,1) = \frac{II(0,1)}{I(0,1)} = \frac{N}{G}$$

Pero tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u,v) &= (\cos v, \sin v, 0) \\ \partial_2 f(u,v) &= (-u \sin v, u \cos v, 1) \\ \partial_2^2 f(u,v) &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \end{aligned}$$

Como $\partial_2^2 f(u,v)$ es paralelo a $\partial_1 f(u,v)$, tenemos $\partial_2^2 f(u,v) \perp \overrightarrow{u}$ y entonces $N = 0$ y $\kappa_n(0,1) = 0$. Las helices u =constante son las curvas asintoticas sobre la "helicoïdal". También las curvas $v = cste$ como son lineas rectas son curvas asintoticas sobre la "helicoïdal".

3.8 Direcciones principales

3.8.1 Puntos ombilicales

La ultima presentación de la curvatura normal nos enseña muy claramente que en un punto de la esfera de radio R, la curvatura normal vale $1/R$ en todas las direcciones. Intoducimos un nombre para tal tipo de punto:

Definición:

Un punto de una sabana regular de clase C^2 en cual la curvatura normal es independiente de las direcciones posibles es llamado un punto ombilical.

Lema:

Sea dos polinomios homogeneos de grado n en $R[X,Y]$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} p_k X^k Y^{n-k} \\ Q &= \sum_{k=0}^{n} q_k X^k Y^{n-k} \end{aligned}$$

el segundo no-cero. Las siguientes relaciones son equivalentes:

1. la función de R^2 en R definida por $F(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ es una constante
2. la función de R en R definida por $f(x) = P(x,1)/Q(x,1)$ es constante.
3. Existe $r \in R$ tal que $P = r.Q$
4. Existe $r \in R$ tal que para cualquier $k \in \{0,..,n\}$, $p_k = rq_k$.

Proposición:

Un punto de sabana S , regular y de clase C^2 es ombilical si y solamente si en este punto, las dos formas fundamentales son proporcinales, es decir

$$F \neq 0, \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

o

$$F = M = 0, \frac{L}{E} = \frac{N}{G}$$

Usando el lema anterior, este resultado es imediato.

3.8.2 Direcciones y curvaturas principales

En general, en un punto de la superficie, la curvatura normal no es igual en todas las direcciones:

Ejemplos:
Consideramos la elipsoïde A :

$$A \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

En el punto $P = (0, 0, c)$ el plan tangente a A es el plano horizontal $z = c$ y

- en la dirección paralela a Ox, la sección normal al elipsoïde es la elipsa de ecuación
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1 \end{cases}$$
y su curvatura en P vale c/a^2.
- en la dirección paralela a Oy, la sección normal de elispsoïde es la elipsa de ecuación:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \end{cases}$$
y su curvatura en P vale c/b^2.

Esas dos curvaturas son iguales solamente si $a = b$, es decir si la elipsoïde es una de revolución.

Definición:
Una dirección en cual la curvatura normal es extremal es llamada dirección principal: la curvatura normal correspondiente es llamada curvatura principal.

Asi, un punto ombilical es un punto donde toda dirección es principal. En un otro punto, hay siempre dos direcciones principales y son ortogonales.

Lema:
Sea $a, b, c \in R$, no todos nulos. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos soluciones no-proporcionales de la ecuación:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

entonces los triplets $(y_1y_2, -(x_1y_2 + x_2y_1), x_1x_2)$ y (a, b, c) son proporcionales.

Demostración:
indicación: estudiar dos casos, $a \neq 0$ y $a = 0$. Poner $z = x/y$ y resolver la ecuacion de segundo grado en z.

Teorema:
Sea P un punto no-ombilical de una sabana S, regular y de clase C^2. En el plano tangente a S en P, existe una y una sola dirección en cual la curvatura normal es maximal, y una y una sola dirección en cual la curvatura normal es minimal. Ademas esas dos direcciones son ortogonales.

Para encontrar las direcciones principales (a,b) es suficiente de resolver las ecuaciones

$$\partial_1\kappa_n(a,b) = \partial_2\kappa_n(a,b) = 0$$

Usando la defininción de la curvatura normal en termino de las dos primeros formas fundamentales, eso no da un sistema de ecuaciones. Para que este sistema de ecuaciones tienen soluciones, los parametros del sistema tienen que satisfacer la siguiente condición:

$$(L - \kappa_n E).(N - \kappa_n G) - (M - \kappa_n F)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \kappa_n^2(EG - F^2) - \kappa_n(GL - 2FM + EN) + LN - M^2 = 0$$

Esta ecuación es conocida como **la ecuación a las curvaturas principales o ecuación a las direcciones principales.**

Este teorema es soprendiente. Para empezar, la "silla de montar del mono" de ecuación $z = x(x^2 - 3y^2)$ no nos da un contra-ejemplo? No es el caso porque todas las cubicas obtenidas como sección de la superficie por un plano conteniendo el eje Oz tienen una curvatura nula en el origen. Entonces, el origen es un punto ombilical de la "silla de montar del mono". De hecho, es un punto planar si usamos la terminologia que vamos a introducir en la proxima sección.

Despues, podemos hacer la siguiente construcción. Sea, en el plano $z = 1$, una curva C cerrada sencilla presentando 4 petalo alargados al largo de los ejes de coordenadas. Por ejemplo, la curva de ecuación polar $r = 2 - \sin^2 2\theta$ estaria buena para el papel de C. Formamos la superficie S reunión de todas las parabolas de eje Oz y de vertice el origen apoyandose sobre la curva C.

Parece evidente que S tiene que tener una curvatura minimal en las direcciones de los dos ejes Ox y Oy y una curvatura normal maximal en las direcciones de los dos bissectrices de los ejes. Pero eso es prohibido por el teorema anterior. Donde nos equivocamos?

Si buscamos una representaciùon parametrica de S, podemos escoger , por ejemplo, la función

$$f : R^2 \to R^3 : \begin{cases} (u,v) \to (u, v, \frac{(u^2+v^2)^5}{4(u^4+v^4)^2}) & (u,v) \neq (0,0) \\ (0,0) \to (0,0,0) & \end{cases}$$

que desafortunamente no es de clase C^2.

Sea S una sabana regular y de clase C^2 y sea P uno de esos puntos. Convenemos de notar w_1 y w_2 dos vectores unitarios en las direcciones principales. Podemos ademas suponer que $(w_1, w_2, \overrightarrow{u})$ es una base ortonormal directa. Y sea $\kappa_{1,2}$ las respectivas curvatura principales correspondiente. Si P es un punto ombilical, tomamos por w_1 un vector tangente unitario y $w_2 = \overrightarrow{u} \wedge w_1$.

Teorema de Euler:

Sea w un vector tangente unitario a S en P. Si el ángulo de los vectores w y w_1 es φ, entonces la curvatura normal de S en la dirección de w es

$$\kappa_n(w) = \cos^2\varphi.\kappa_1 + \sin^2\varphi.\kappa_2$$

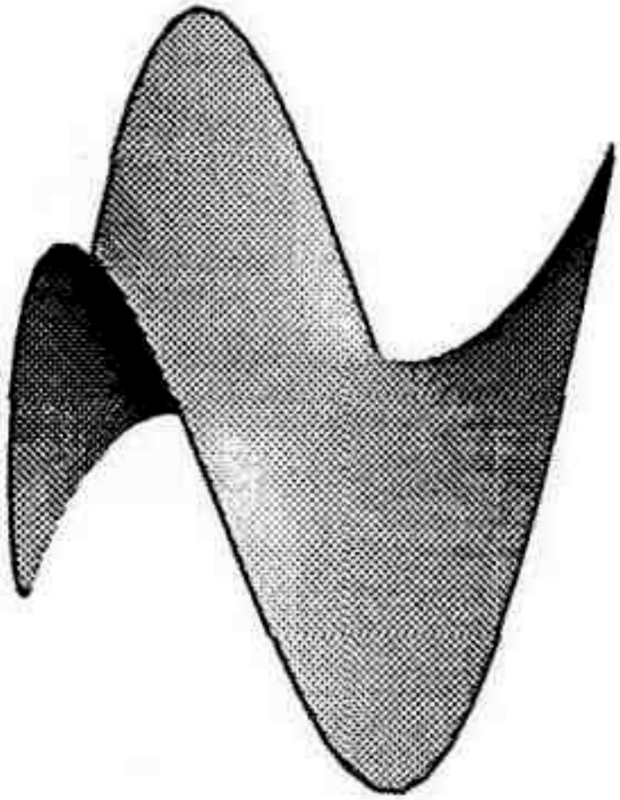

Figura 3.10:

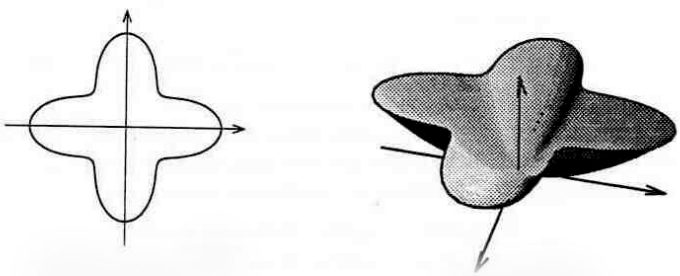

Figura 3.11:

3.9 Clasificaciones de los puntos de una superficie

Sea S una sabana regular de clase C^2; en cada de sus puntos, notamos $\kappa_1 \leq \kappa_2$ las curvaturas principales. Asi un punto es ombilical si y solamente si en este punto $\kappa_1 = \kappa_2$.

$\boxed{\text{Definición:}}$
Sea P un punto de sabana regular de clase C^2

- *Si, en P, las curvaturas principales son no-ceros y de mismo signo (es decir $\kappa_1.\kappa_2 > 0$), P es dicho eliptico.*
- *Si, en P, las curvaturas principales son no-ceros y de signo opuesto (es decir $\kappa_1.\kappa_2 < 0$), P es dicho hiperbolico.*
- *Si, en P, al menos una de las curvaturas principales es nula (es decir $\kappa_1.\kappa_2 = 0$), P es dicho parabolico.*
- *Si, en P, las curvaturas principales son ceros (es decir $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$), P es dicho planar.*

Un punto es entonces eliptico si en este punto no hay dirección asintotica y es hiperbolico si hay dos direcciones asintotica. En un punto parabolico no planar, hay solamente una.Y en un plano planar, todas las direcciones son asintoticas.

En un punto eliptico, como la curvatura no cambia de signo, todas las secciones normales de la sabana tienen su concavidad en el mismo sentido. Entonces, en la vecindad de tal punto, la sabana es completamente situada de un lado al plano tangente. En un punto hiperbolico, la sabana traversa el plano tangente. Mas precisamente, la intersección de la sabana y de su plano tangente es una curva que admite como tangentes en P las dos lineas rectas, en el plano tangente, por las direcciones asintoticas. En un punto parabolico, los dos situaciones son posibles.

Ejemplos:

1. Todo punto ombilical es eliptico (es el caso de todos los puntos de una esfera) o planar (caso de un plano).
2. Por cualquier punto de una paraboloïda hiperbolica pasen parabolas situadas de los dos lados del plano tangente; esas parabolas tienen curvaturas normales de signos opuestos. Entonces, cada punto de un paraboloïda hiperbolica es hiperbolica.
3. En un punto de un cilindro, la dirección de la generadora es una dirección asintotica: en todas las otras direcciones, la curvatura normal es de mismo signo. Entonces, todos los puntos de un cilindro son parabolicos.

Figura 3.12:

4. Sobre el toro, la paralela inferior y la paralela superior son las lineas de puntos parabolicos. Comparten el toro en una zona externa donde los puntos son elipticos y una zona "interna" donde los puntos son hiperbolicas.

5. Consideramos dos sabanas:

$$S_{\pm} \equiv z = x^2 \pm y^2$$

Al origen, el plano tangente es Oxy y los dos direcciones principales son las direcciones de los ejes Ox y Oy. La sección normal por el plano Oxz es, en este ultimo, la parabola de ecuación $z = x^2$ y su curvatura en el vertice vale 2. La sección normal por el plano Oyz es en este plano, la cuartica $z = \pm y^4$ de curvatura en su vertice igual a cero. Si la orientación escogida es tal que el vector normal es dirigido por arriba, los dos curvaturas principales , al origen, son entonces, $\kappa_1 = 2$ y $\kappa_2 = 0$: este punto es parabolico. Pero S_+ es completamente situado en el semi-espacio superior y S_- traverse el plano Oxy.

3.9.1 La indicatora de Dupin.

Si w es un vector tangente unitario a una sabana S en un punto P, tal que su dirección no es asintotica, definimos el radio de curvatura normal correspondiente como

$$\rho_n(w) \equiv \frac{1}{|\kappa_n(w)|}$$

Procedamos a la siguiente construcción: reportamos en cada dirección no-asintotica del plano tangente, una longitud igual a la raiz cuadrada del radio de curvatura normal. En otras palabras, asociamos el punto

$$Q(w) \equiv P + \sqrt{\rho_n(w)}w$$

a cada vector tangente unitario w. El lugar de este punto $Q(w)$ es llamado la indicatora de Dupin de S en P.

Como la indicatora de Dupin concretisa geometricamente la información sobre todas las curvaturas normales de la sabana en un punto, ella informa sobre la forma de la curvatura en la vecindad del punto.

Proposición:

Sea P un punto de una sabana de clase C^2. La indicatora de Dupin en P

1. *es un circulo si y solamente si P es un punto ombilical no-planar.*

2. *es una elipsa si y solamente si P es un punto elliptica.*

3. *es la reunión de dos hiperbolas de misma asintotes si y solamente si P es un punto hiperbolico.*

4. *es la reunión de dos lineas rectas paralelas si y solamente si P es un punto parabolico no-planar.*

5. *es el vacio si y solamente si P es un plano planar.*

Demostración:

Del teorema de Euler, podemos deducir una ecuación polar de la indicatora de Dupin en la referencia ortonormal $\mathcal{R} \equiv (P; w_1, w_2)$ del plano tangente:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left|\cos^2\varphi.\kappa_1 + \sin^2\varphi.\kappa_2\right|}}$$

Si $\kappa_{1,2} = 0$, el denominator es siempre cero, lo que prueba el punto (5) del teorema.

En los otros casos, ponemos la ecuación sobre la forma:

$$r^2.\left|\cos^2\varphi.\kappa_1 + \sin^2\varphi.\kappa_2\right| = 1$$

lo que es equivalente en coordenadas cartesianas:

$$x^2\kappa_1 + y^2\kappa_2 = \pm 1$$

- si $\kappa_{1,2} \neq 0$,esta ecuación describo un elipsa.

- si $\kappa_{1,2}$ son no-cero y de signo opuesto, tenemos la ecuación de una hiperbola y sus asintotes son las derechas $\sqrt{|\kappa_1|}x = \pm\sqrt{|\kappa_2|}y$.
- si una de los dos curvaturas es nula, la ecuación se reduce a $x = \pm 1/\sqrt{|\kappa_1|}$, es decir que describo la reunión de dos lineas rectas paralelas a la dirección asintotica.

Pero la indicatora de Dupin es todavia mas rica en contenido geometrico que la descripción anterior deja adivinar. De hecho, es posible de dar una construcción totalemente diferente.

Sea $\epsilon > 0$. Consideramos la curva de intersección de S y de la reunión de dos planos paralelos al plano tangente en P distantes de ϵ. Sea D_ϵ el imagen de esta curva de intersección por la homotetia de centro P y de razón $1/\sqrt{2\epsilon}$. La indicatora de Dupin es el limite de la curva D_ϵ cuando $\epsilon \to 0$. Vamos a justificarlo.

Por eso, vamos a usar la representación parametrica $f : U \to R^3$ de S y su expansion en serie de Taylor de orden dos alrededor del punto $(u_0, v_0) \in U$ tal que $f(u_0, v_0) = P$.

$$\begin{aligned} f(u,v) \quad \simeq \quad & f(u_0,v_0) + (u-u_0)\partial_1 f(u_0,v_0) + (v-v_0)\partial_2 f(u_0,v_0) + \\ & \frac{1}{2}\big((u-u_0)^2\partial_1^2 f(u_0,v_0) + 2(u-u_0)(v-v_0)\partial_1\partial_2 f(u_0,v_0) + \\ & (v-v_0)\partial_2^2 f(u_0,v_0)\big) \end{aligned}$$

Trabajamos en la referencia $\mathcal{R} \equiv (P, \partial_1 f(u_0,v_0), \partial_2 f(u_0,v_0), \overrightarrow{u}(u_0,v_0))$ y notamos (a,b,c) sus coordenadas. Esta referencia no es ortonormal pero el tercero vector de base es unitario y ortogonal a los dos otros. Limitandonos a los terminos dominantes, la sabana S es entonces determinada por los ecuaciones parametricas $a \simeq (u-u_0)$ y $b \simeq (v-v_0)$ y

$$\begin{aligned} c \quad & \simeq \quad \left(\overrightarrow{u}(u_0,v_0) \;\middle|\; \begin{array}{c} (u-u_0)\partial_1 f(u_0,v_0) + (v-v_0)\partial_2 f(u_0,v_0) + \\ \frac{1}{2}\big((u-u_0)^2\partial_1^2 f(u_0,v_0) + \\ +2(u-u_0)(v-v_0)\partial_1\partial_2 f(u_0,v_0) + \\ (v-v_0)\partial_2^2 f(u_0,v_0)\big) \end{array}\right) \\ & = \quad \left(\overrightarrow{u}(u_0,v_0) \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{1}{2}\big((u-u_0)^2\partial_1^2 f(u_0,v_0) + \\ +2(u-u_0)(v-v_0)\partial_1\partial_2 f(u_0,v_0) + \\ (v-v_0)\partial_2^2 f(u_0,v_0)\big) \end{array}\right) \\ & = \quad \frac{1}{2}\Big((u-u_0)^2 L + 2(u-u_0)(v-v_0)M + (v-v_0)^2 N\Big) \end{aligned}$$

Los dos planos tienen como ecuaciones $c = \pm\epsilon$. Entonces, la aproximación de segundo orden de la intersección tiene como ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2L + 2abM + b^2N = 2c \\ c = \pm\epsilon \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} a^2L + 2abM + b^2N = \pm 2\epsilon \\ c = \pm\epsilon \end{cases}$$

Su imagen por homotetia de centro P y de razon $1/\sqrt{2\epsilon}$ es entonces

$$\left\{\begin{array}{c} a^2L + 2abM + b^2N = \pm 1 \\ c = \pm\sqrt{\epsilon/2} \end{array}\right.$$

el limite de esta ultima, para $\epsilon \to 0$ es entonces

$$\left\{\begin{array}{c} a^2L + 2abM + b^2N = \pm 1 \\ c = 0 \end{array}\right.$$

Pero

$$a^2L + 2abM + b^2N = \kappa_n(a,b)\left(a^2E + 2abF + b^2G\right)$$

Asi la ecuación $a^2L + 2abM + b^2N = \pm 1$ se rescribo

$$\left(a^2E + 2abF + b^2G\right) = \pm\frac{1}{\kappa_n(a,b)}$$

Como el miembro de izquierda representa el cuadrado de la distancia del origen al punto de coordenadas $(a, b, 0)$ y que el valor absoluta del miembro de derecha es el radio de curvatura normal en la dirección (a, b), encontramos bien la primera construcción de la indicatora de Dupin.

3.10 Curvatura total

Introducimos todavia la noción siguiente que resume en un solo nombre una parte de la información de una superficie en un punto.

Definición:

la curvatura total o curvatura de Gauss de S en P es el producto $\kappa_\tau \equiv \kappa_1.\kappa_2$

Ejemplo:

Como en cada punto de una esfera de radio R la curvatura normal vale $1/R$ en todas las direcciones, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/R$ y $\kappa_\tau = 1/R^2$.

De la definición, resulta imediatamente que

Proposición:

El punto P es

- *eliptico si y solamente si $\kappa_\tau > 0$*
- *parabolica si y solamente si $\kappa_\tau = 0$*
- *hiperbolica si y solamente si $\kappa_\tau < 0$*

Ademas, tenemos la proposición siguiente:

Proposición:

La curvatura total se expresa por

$$\kappa_\tau = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

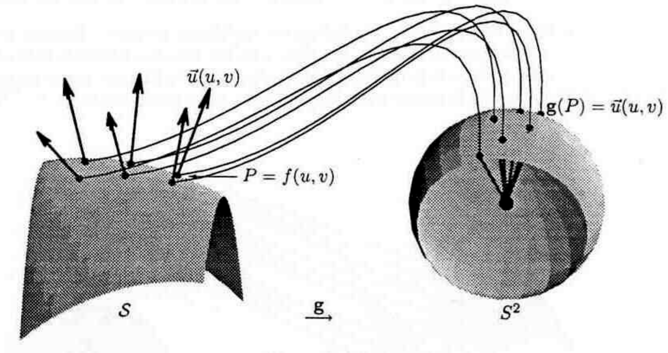

Figura 3.13: Aplicación de Gauss

(demostración evidente usando la ecuación a curvaturas principales)

Consecuencia:

El punto P es

- *eliptico si y solamente si* $LN - M^2 > 0$
- *parabolica si y solamente si* $LN - M^2 = 0$
- *hiperbolica si y solamente si* $LN - M^2 < 0$

3.10.1 La aplicación de Gauss

La curvatura total admite la interpretación geometrica siguiente.

Sea S una sabana regular. En cada punto P de S existe un vector normal $\overrightarrow{u}$, este vector normal es unitario y entonces, determina un punto $g(P) \equiv O + \overrightarrow{u}$ de la esfera-unidad S^2. Eso nos defne una aplicación:

$$g : S \to S^2$$

llamada **aplicación de Gauss**.

Ejemplos:

1. Si S es un pedazo de un plano $\prod$, determinamos la orientación de $\prod$ usando un vector normal unitario n. Entonces, si la orientación de S fue judiciosamente escogida, $\overrightarrow{u}(u,v) = n$ en cualquier punto de S (si es la otra orientación de S que fue escogida, tenemos $\overrightarrow{u}(u,v) = -n$). La aplicación de Gauss es entonces la aplicación constante:

$$g : S \to S^2 : P \to O + n$$

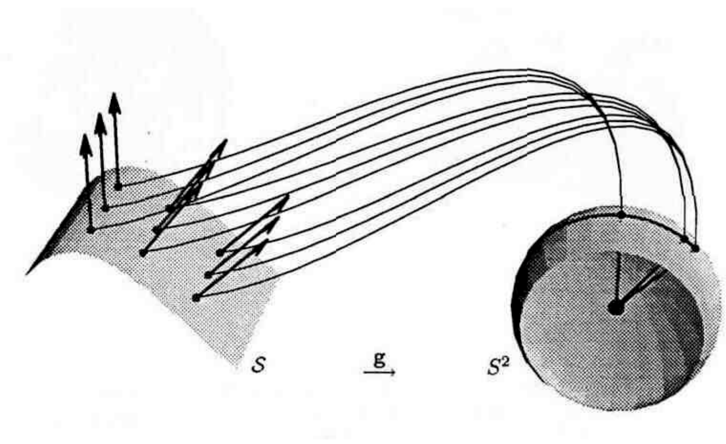

Figura 3.14:

2. en el caso de la esfera de radio R, la aplicación de Gauss es sencillamente una homotetia de razùon $1/R$.

Sea P un punto de S, consideramos un dominio D de S ,conteniendo P, y sea $g(D) \subseteq S^2$ el imagen de D por g. Entonces,

$$|\kappa_\tau(P)| = \lim_{D \to \{P\}} \frac{A(g(D))}{A(D)} \tag{3.3}$$

el limite es tomada cuando el diametro de D va a tender a cero sin que su area se anula. Ademas, $\kappa_\tau(P)$ es positivo (resp. negativo) si en la vecindad de P la aplicación de Gauss preserva (o inverte) la orientación.

Ejemplos:

1. hay un caso donde el resultado es evidente: cuando S es un pedazo de plano, como en este caso, $A(g(D)) = A(\{O + n\}) = 0$ para cualquier D.

2. En un otro caso, el resultado es también evidente: cuando S es una superficie cilindrica. De hecho, todos los vectores normales son entonces ortogonales a la dirección de las generadoras y el imagen por g de cualquier parte de la superficie cilindrica es un arco de gran circulo sobre S^2 de area nula.

3. En el caso que S sea una esfera de radio R, la aplicación de Gauss es una homotetia de razón $1/R$ cualquier sea $D \subseteq S$:

$$A(g(D)) = \frac{1}{R^2} A(D)$$

lo que nos da que

$$|\kappa_\tau(P)| = 1/R^2$$

Vamos a dar ahora una demostración no-exhaustiva de la relación (3.3). Ponemos
$$l \equiv \lim_{D\to\{P\}} \frac{A(g(D))}{A(D)}$$
En el objetivo de hallar este limite, vamos a darnos una representación parametrica $f : U \to R^3$ de S y notamos (u_0, v_0) las coordenadas curvilineas de P y definimos $\Delta = f^{-1}(D)$. Entonces, $\overrightarrow{u} : U \to R^3$ es una representación parametrica de S^2 (o al menos de $g(S)$) en cual $\Delta = \overrightarrow{u}^{-1}(g(D))$. Notamos como siempre, E, F y G los coeficientes de la primera forma fundamental de f ; E^*, F^* y G^* los coeficientes de la primera forma fundamental de $\overrightarrow{u}$. Entonces,
$$A(D) = \int\int_\Delta \sqrt{EG - F^2}$$
Usando el teorema de la mediana, existe $(u_1, v_1) \in \Delta$ tal que
$$\int\int_\Delta \sqrt{EG - F^2} = A(\Delta)\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}$$
donde notamos $E_1 = E(u_1, v_1)$, etc... De la misma manera, existe $(u_2, v_2) \in \Delta$ tal que
$$A(g(D)) = \int\int_\Delta \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} = A(\Delta).\sqrt{E_2^*G_2^* - F_2^{*2}}$$
Asi tenemos
$$l = \lim_{\Delta\to\{(u_0,v_0)\}} \frac{\sqrt{E_2^*G_2^* - F_2^{*2}}}{\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}}$$
Pero si $\Delta \to \{(u_0, v_0)\}$, los puntos (u_1, v_1) y (u_2, v_2) van a tender al punto (u_0, v_0) y por continuidad de los coeficientes de la primera forma fundamental, tenemos
$$l = \sqrt{\frac{E_0^*G_0^* - F_0^{*2}}{E_0G_0 - F_0^2}}$$
Nos queda a evaluar esos coeficientes. Pero, las formulas de Weingarten nos dicen que
$$\begin{aligned} L &= -(\partial_1 f|\partial_1 \overrightarrow{u}) \\ M &= -(\partial_1 f|\partial_2 \overrightarrow{u}) = -(\partial_2 f|\partial_1 \overrightarrow{u}) \\ N &= -(\partial_2 f|\partial_2 \overrightarrow{u}) \end{aligned}$$
Eso significa que la columna de las coordenadas covariantes de $\partial_1 \overrightarrow{u}$ en la base Jf es
$$^{Jf}\partial_1 \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -L \\ -M \end{pmatrix}$$
La matriz del producto escalar en la base Jf es
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

y su inverso es

$$\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Entonces, las coordenadas de $\partial_1 \overrightarrow{u}$ en Jf son

$$\begin{aligned} {}_{Jf}\partial_1 \overrightarrow{u} &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -L \\ -M \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} FM-GL \\ FL-EM \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Igual para $\partial_2 \overrightarrow{u}$, tenemos

$${}_{Jf}\partial_2 \overrightarrow{u} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} FN-GM \\ FM-EN \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E^* &= (\partial_1 \overrightarrow{u} | \partial_1 \overrightarrow{u}) \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\,(FN-GM \quad FM-EN)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} FM-GL \\ FL-EM \end{pmatrix} \\ &= \frac{EM^2-2FLM+GL^2}{EG-F^2} \end{aligned}$$

De misma manera obtenemos

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{EMN-F(LN+M^2)+GLM}{EG-F^2} \\ G^* &= \frac{EN^2-2FMN+GM^2}{EG-F^2} \end{aligned}$$

Entonces,

$$E^*G^*-F^{*2} = \frac{(LN-M^2)^2}{EG-F^2}$$

de tal manera que obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\frac{E_0^*G_0^*-F_0^{*2}}{E_0G_0-F_0^2}} \\ &= \frac{\left|L_0N_0-M_0^2\right|}{E_0G_0-F_0^2} \\ &= |\kappa_\tau(P)| \end{aligned}$$

3.11 Curvatura geodesica

La curvatura geodesica de un arco trazado sobre una sabana es la componente de la curvatura del arco en el plano tangente a la sabana.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea C un arco regular orientado de clase C^2 trazado sobre una sabana regular de clase C^2. La curvatura geodesica de C sobre S es el producto mixto del vector curvatura de C, del vector normal a S y del vector tangente a C.

Si como usualemente, notamos $f : U \to R^3$ una representación parametrica de la sabana y $h = f \circ g$ con $g : I \to U$ una representación del arco:

$$\kappa_g \equiv \left[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{u} \circ g, \overrightarrow{t}\right]$$

Actuando asi dimos un signo a la curvatura geodesica: es positiva si la curva gira a la izquierda y negativa si la curva gira a la derecha para un observador quien se encuentra en el plano tangente en el sentido indicado por el vector normal . La curvatura geodesica cambia de signo si cambiamos la orientación de la curva o la orientación de la superficie.

Hay que notar que esta definición es en acuerdo con la manera que introducimos esta noción en las secciones anteriores cuando introducimos el triedro de Darboux-Ribaucour. De hecho, de la igualdad (3.2) y de la construcción del vector $\overrightarrow{g}$, podemos deducir que

$$\begin{aligned}\kappa_g &= (\overrightarrow{k}|\overrightarrow{g}) \\ &= (\overrightarrow{k}|(\overrightarrow{u} \circ g) \wedge \overrightarrow{t}) \\ &= \left[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{u} \circ g, \overrightarrow{t}\right]\end{aligned}$$

Usando las relaciones (3.2), tenemos

$$\begin{aligned}\kappa_n &= -\kappa \sin \omega \\ \kappa_g &= \kappa \cos \omega \\ \kappa^2 &= \kappa_n^2 + \kappa_g^2\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde ω es el ángulo entre el plano tangente a la sabana y el plano osculator del arco.

Ejemplo:

Podemos disfrutar de la ultima igualdad para hallar la curvatura geodesica de un circulo de radio r trazado sobre una esfera de radio R.

Sabemos desde el capitulo anterior que $\kappa = 1/r$ y obtenimos en las secciones anteriores que $\kappa_n = 1/R$. Entonces, olvidando el problema del signo, tenemos

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n^2} \\ &= \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{Rr}\end{aligned}$$

Entonces, si la esfera es muy grande es decir si $R \to \infty$, $\kappa_g = 1/r$ y encontramos de nuevo la curvatura propia del circulo.

Como lo indican las ecuaciones (3.4), esta situación puede encontrarse también no solamente como un caso limite pero cuando el plano osculator y el plano tangente son confondidos:

$$|\kappa_g| = \kappa \Leftrightarrow \kappa_n = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$$

Cuando eso se produce todo al largo del arco, el arco es una curva asintotica.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Un arco regular de clase C^2 trazado sobre una sabana regular de clase C^2 es una geodesica si su curvatura geodesica es nula en cualquiera de sus puntos.

Proposición:

Sea C un arco regular de clase C^2 trazada sobre una sabana regular de clase C^2. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. *C es una geodesica*
2. *En cualquier punto de C, $|\kappa_n| = \kappa$*
3. *En cualquier punto de C, $\overrightarrow{k}$ y $\overrightarrow{u}$ son paralelos.*
4. *En cualquier punto de C, el plano osculator es ortogonal al plano tangente a la sabana.*

Ejemplos:

1. La curvatura geodesica de un circulo trazado sobre la esfera se anula si y solamente si sus radios son iguales, es decir si el circulo es un gran circulo. El plano que lo contiene pasa por el centro de la esfera y es entonces, ortogonal al plano tangente.

2. sea la función $\overline{f}$ una representación parametrica normal de una helice circular (degenerada en un circulo si $b = 0$) trazada sobre el cilindro de revolución de radio a y de eje Oz.

$$\overline{f} : R \to R^3 :$$
$$s \to \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

Su vector curvatura es

$$\overrightarrow{k}(s) = \overline{f}'' = -\frac{a}{a^2+b^2} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$$

es horizontal y se diriga en dirección del eje del cilindro, como también el vector normal del cilindro. Entonces, esos dos vectores son paralelos, lo que significa que la helice circular (o el circulo)son geodesicas del cilindro de revolución. Ademas, las generadoras del cilindro tienen una curva nula y entonces una curva geodesica nula: son también geodesica.

3.12 Superficies arregladas

Llamamos superficies arregladas, superdficies que tienen la particularidad de ser una reunión de derechas. En esta sección vamos a estudiar de manera breve las superficies arregladas. El hecho que esas superficies son engendrada por derechas explica el número de sus aplicaciones tecnicas y su importancia en los tratados de geometría descriptiva.

Como en las primeras secciones de este capitulo, trabajamos en un espacio afin real E.

Sea $f : U \to \mathcal{E}$ y $g : U \to \overrightarrow{E}$ donde U es un abierto de R. Es importante de insistir sobre el hecho que los valores de f son puntos y los valores de g son vectores.

Suponemos f y g de clase C^k y suponemos que ademas esta ultima no se anula. Una representación parametrica de superficie de la forma

$$h : U^* \to \mathcal{E} : (u, v) \to f(u) + vg(u)$$

donde $U^* \subseteq U \times R$ es llamada una **representación parametrica arreglada:** una superficie que admite una representación arreglada es dicha **superficie arreglada**. Naturalemente, una superficie arreglada puede también admitir representaciones parametricas no-arregladas.

Muchas veces, f va estar una representación parametrica de clase C^k de una curva D. Entonces, la curva de parametros $v = 0$ sobre la superficie arreglada es nadamas que la curva D, esta curva se llama **directora** de la representación parametrica arreglada. Es importante de notar que la directora es ligada a la representaciùon y no a la superficie misma. De hecho, una superficie arreglada admite representaciones arregladas construida sobre diferentes directoras.

Cuanto a la curva de parametros $u = u_0$, esta curva admite la representación parametrica $t \to f(u_0) + tg(u_0)$: es la derecha pasando por $f(u_0)$ y con vector director $g(u_0)$, cada una de esas derechas (para $u_0 \in U$) es llamada **generatora de la superficie arreglada**. La superficie arreglada es entonces una reunión de derechas.

Si no exigimos que f sea en todos los casos una representación parametrica de curve es con fin de no excluir un caso particular importante donde f es constante. Eso nos da entonces,

$$h : (u, v) \to P + vg(u)$$

y una superficie arreglada admitiendo una representación arreglada de esta forma es llamada un **cono.** Sus generadoras se encuentran todas en P que es llamado vertice del cono. Podemos notar que U^* no puede contener puntos de la forma $(u, 0)$ porque h no seria inyectiva en una vecindad de tal punto.

Cuando es g que es una constante $w \in V$, tenemos

$$h : (u, v) \to f(u) + vw$$

y la superficie arreglada es un cilindro. Sus generadoras son todas paralelas a w.

Ejemplos:

1. Tomamos de nuevo como ejemplo la paraboloïda hiperbolica $Q \equiv z = x^2 - y^2$. Vimos que tal superficie puede ser representada por
$$k : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u, v, u^2 - v^2)$$
claramente, no es una representación parametrica arreglada. Pero si la composamos con el cambio de variable φ :
$$\varphi : R^2 \to R^2 : (s, t) \to (s + t, s - t)$$
obtenemos
$$f = k \circ \varphi : R^2 \to R^3 : (s, t) \to (s + t, s - t, 4st)$$
que es una representación parametrica arreglada.

2. Tomamos de nuevo el ejemplo del helice circular. La reunión de las perpendiculares bajadas de la helice sobre su eje es una superficie arreglada llamda "helicoïde". Este admite como representación:
$$f : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (0, 0, bu/(2\pi)) + v(\cos u, \sin u, 0)$$

3. Sea C un arco en E. La evoluta tangencial de C es la superficie arreglada constituida de las tangentes a C.
Sea mas precisamente, un arco C representado por $f : I \to \mathcal{E}$ de clase C^2 y tal que $f^{'}$ y $f^{''}$ son linealmente independiente en cualquier punto. Su evoluta tangencial S es representada por
$$h : I^* \to R^3 : (u, v) \to f(u) + vf^{'}(u)$$
Entonces,
$$\partial_1 h = f^{'}(u) + vf^{''}(u)$$
$$\partial_2 h = f^{'}(u)$$
de tal manera que $\partial_2 h(u, 0) = \partial_1 h(u, 0)$. Eso significa que sobre S, todos los puntos de C son singulares y con las hipotesis hechas sobre f, los otros puntos son regulares. Si $v \neq 0$, el plano tangente a S al punto $h(u, v) = f(u) + vf^{'}(u)$ es el plano conteniendo este punto y tal que su dirección es engendrada por $\partial_1 h$ y $\partial_2 h$ o lo que es equivalente el plano conteniendo $f(u)$ y tal que su dirección es engendrada por $f^{'}(u)$ y $f^{''}(u)$: entonces, es el plano osculator a C al punto $f(u)$.

3.13 Superficies de revolución

Sea una curva de $E^2(R)$ representada por $f : U \to R^2$. Desemaos pensarla como una curva C contenida en el plano Oxz de $E^3(R)$. Por eso, vamos a composar f con la inserción:
$$E^2(R) \to E^3(R) : (u, v) \to (u, 0, v)$$

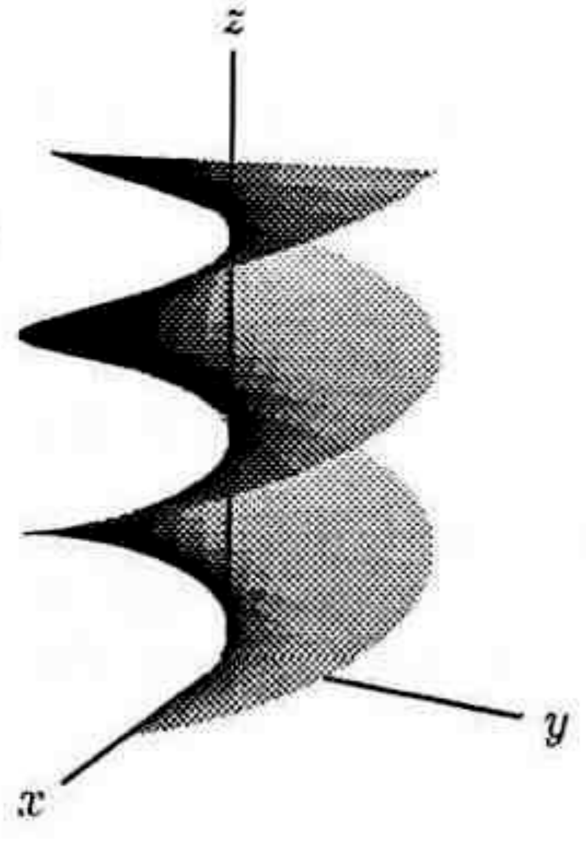

Figura 3.15:

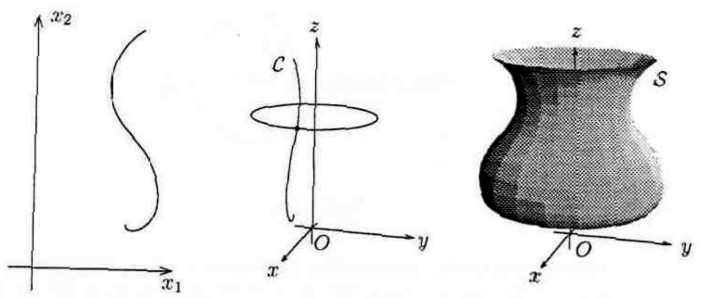

Figura 3.16: Superficie de revolución

lo que nos da:

$$f^* : U \to R^2 : t \to (f_1(t), 0, f_2(t))$$

Cuando el plano Oxz gira alrededor del eje Oz, esta curva va a engendrar una superficie S llamada **superficie de revolución**. Esta superficie admite como representación parametrica:

$$g : U \times R \to R^3 : (u, v) \to (f_1(u)\cos v, f_1(u)\sin v, f_2(u))$$

Las curvas $u = cste$ son circulos de eje Oz, son llamadas **paralelos** y las curvas $v = cste$ son llamadas **meridianos**.

Ejemplos:

1. La representación parametrica

$$(u, v) \to (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$$

de la esfera de radio R centrada en el origen (privada de sus dos polos) es de hecho, una representación parametrica de superficie de revolución, el meridiano inicial ($v = 0$) es el semi-circulo representado por

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to R^3 : t \to (R\cos t, 0, R\sin t)$$

2. Construimos el toro: es la superficie de revolución engendrada por un circulo de radio $b > 0$, girando alrededor de una derecha de su plano situado al una distancia $a > b$.
Tomamos esta derecha como eje Ox_2 y localisamos el centro del circulo en el punto $(a, 0)$ del plano Ox_1x_2. El circulo es entonces representado, en Ox_1x_2 por

$$f : R \to R^2 : t \to (a + b\cos t, b\sin t)$$

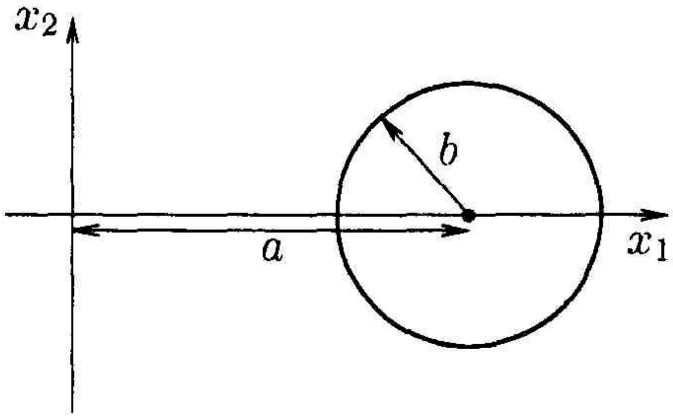

Figura 3.17:

y en $Oxyz$, por

$$f^* : R \to R^3 : t \to (a + b\cos t, 0, b\sin t)$$

de tal manera que el toro admite por representación parametrica:

$$g : R^2 \to R^3 : (u, v) \to ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$$

eso es una representación parametrica de superficie de clase C^∞.

Capitulo 4

Introducción a la geometría Riemaniana

El objeto de la geometría riemaniana es de estudiar las superficies (y mas generalemente las variedades de dimensión cualquier) independientamente del espacio donde esas superficies o variedades son imersas.

Podemos tener una idea de eso imaginando seres bidimensionales viviendo en una superficie a dos dimensiones: como medio para estudiar su universo, disponen solamente de las medidas que pueden hacer sobre la superficie. No pueden "salir" de su superficie. No tienen consciencia que existe un espacio que contiene su mundo-superficie. Para ellos, el universo tiene dos dimensiones y imaginar que existe otras dimensiones es de la pura especulación abstracta. Pero, esos seres bidimensionales no son en la incapacidad de tener información sobre el mundo donde viven. Imaginamos que construyen un triángulo y miden sus ángulos. Si la suma de los tres ángulos es diferente de π, nuestros seres planos van a poder afirmar que su universo-plano no es un plano, ni una superficie que se deja deformar en un plano: cilindro,cono,...

Mutatis mutandis , eso es exactamente nuestra situación. Tenemos el sentimiento de vivir en un mundo a tres dimensiones pero este mundo no es immersado en un espacio a cuatro dimensiones o mas? Como saberlo?

Para precisar mas las cosas, la geometría riemaniana estudia los propiedades de las superficies que pueden definirse a partir de medidas hechas sobre la superficie misma. Esas propiedades son dichas **intrinsecas.** Otras propiedades depiende de medidas hechas en el espacio donde la superficie es immersada. Tal propiedad es dicha **extrinseca**.

El ejemplo lo mas fundamental de propiedad intrinseca es la longitud de un arco trazado sobre la superficie. Al opuesto, un ejemplo de propiedad extrinseca es la noción de punto ombilical. Por ejemplo, tomamos un hoja de papel y dibujamos sobre este una curva. Si curvamos la hoja de papel , la longitud del arco queda no-cambiado. Al opuesto, si la hoja es plana, todos los puntos son planares y entonces ombilicales. Pero si enrolamos la hoja para darle una forma de cilindro de revolución, ningun punto es ombilical por que sobre un cilindro de revolución r, una de las curvaturas principales es nula y la otra vale $1/r$ o $-1/r$ dependiendo de la orientación escogida.

Como no nos interesamos a la manera que la superficie es immersada en el espacio, es decir que nos deseamos describir la superficie usando una representación parametrica en las coordenadas de los puntos. Nuestra idea es mas de poder efectuar medidas sobre la superficie. Para eso, lo que es fundamental es de disponer de la metrica, es decir de la primera forma.

En este breve introducción a la geometría riemaniana, nos limitaremos en el aspecto local de la geometría riemaniana, es decir que vamos a estudiar y definir los arcos riemanianos.

Vamos a usar una presentación matricial con indices, lo que puede aparecer como una pena inutil como los indices van a correr de 1 a 2 pero asi la generalización a variedades riemanianas de dimensión superior es evidente.

Un ultima nota, para ayudar a localizar los limites de la geometría riemaniana: una curva puede siempre deformarse, sin estiramiento, en una linea recta. Asi del punto de vista de la geometría riemaniana, cualquier curva es equivalente a las lineas rectas: su "curvatura riemaniana" es nula.

4.1 Tensor métrico y arcos riemanianos.

Concretisamos la idea de definir un arco riemaniano por su primera forma fundamental.

Sea $k \in N^*$

$\boxed{\text{Definición:}}$

Un tensor métrico de clase C^k es una función a valores matriciales:

$$g : U \to R^{2\times 2} : (x^1, x^2) \to g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1, x^2) & g_{12}(x^1, x^2) \\ g_{21}(x^1, x^2) & g_{22}(x^1, x^2) \end{pmatrix}$$

de clase C^{k-1} donde U es un abierto de R^2 tal que $g(x^1, x^2)$ es simetrica y definida positiva por cualquier $(x^1, x^2) \in U$.

Vamos a ver la "matriz" g como un producto escalar. Deberiamos decir que g representa un producto escalar. En particular, es una forma bilinear, es decir una aplicación:

$$\pi_{(x^1,x^2)} \times \pi_{(x^1,x^2)} \to R$$

donde $\pi_{(x^1,x^2)}$ es pensado como el plano tangente al arco riemaniano en el punto de parametro (x^1, x^2). Esta aplicación manda los dos vectores (a^1, a^2) y (b^1, b^2) sobre

$$(a^1 a^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix} = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$$

Anticipando sobre lo que va a seguir, vamos a decir que g es un tensor dos veces covariantes.

Si la aplicación g es llamada tensor métrico es para recordar que es ella que permite de hacer medidas sobre el arco riemaniano.

Ejemplos:

1. Sea
$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times R \to R^3 : (u,v) \to (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$$
es una representación parametrica de la esfera de radio R centrada en el origen, privada de sus dos polos. Como
$$\begin{aligned}\partial_1 f(u,v) &= (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)\\ \partial_2 f(u,v) &= (-R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0)\end{aligned}$$
Entonces, tenemos
$$\begin{aligned}E &= R^2\\ F &= 0\\ G &= R^2\cos^2 u\end{aligned}$$
Entonces, el tensor métrico correspondiente es
$$g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times R \to R^{2\times 2} : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 x^1 \end{pmatrix}$$

2. Sea
$$f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u, v, u^2 - v^2)$$
del paraboloïde hiperbolico. Como
$$\begin{aligned}\partial_1 f(u,v) &= (1, 0, 2u)\\ \partial_2 f(u,v) &= (0, 1, -2v)\end{aligned}$$
Tenemos
$$\begin{aligned}E &= 1 + 4u^2\\ F &= -4uv\\ G &= 1 + 4v^2\end{aligned}$$
y el tensor métrico correspondiente es
$$g : R^2 \to R^{2\times 2} : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} 1 + 4(x^1)^2 & -4x^1x^2 \\ -4x^1x^2 & 1 + 4(x^2)^2 \end{pmatrix}$$

La etapa siguiente es de describir los cambios de parametros. Para hacer eso, vamos a proceder de manera analoga a lo que hicimos para las representaciones parametricas. Recuedamos que f y $\widetilde{f}$ son dos representaciones parametricas equivalentes via el cambio de parametro φ ($f = \widetilde{f} \circ \varphi$), entonces,

$$g = (J\varphi)^t.(\widetilde{g} \circ \varphi).J\varphi$$

donde $J\varphi$ es la matriz jacobiana de φ. Explicitamente eso significa que

$$g_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} (\widetilde{g}_{\alpha\beta} \circ \varphi).\partial_i \varphi^\alpha.\partial_j \varphi^\beta \tag{4.1}$$

En el marco de la geometría riemaniana, no tenemos representaciones parametrica. Asi vamos a tomar la formula (4.1) como definición de un cambio de parametros.

Definición:
Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ y $\widetilde{g} : U \to R^{2\times 2}$ dos tensores métricos de clase C^k. Un cambio de parametros de clase C^k entre g y $\widetilde{g}$ es una biyección $\varphi : U \to \widetilde{U}$ de clase C^k y de reciproca de clase C^k.
Si $\varphi : U \to \widetilde{U}$ es un cambio de parametros, notaremos $\widetilde{\varphi}$ por φ^{-1}.

Definición:
Cuando existe un cambio de parametros $\varphi : U \to \widetilde{U}$ de clase C^k tal que

$$g_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} (\widetilde{g}_{\alpha\beta} \circ \varphi).\partial_i \varphi^\alpha.\partial_j \varphi^\beta \tag{4.2}$$

$g : U \to R^{2\times 2}$ y $\widetilde{g} : U \to R^{2\times 2}$ son dichos equivalentes en clase C^k.

Contrariamente a la situación encontrado por los arcos de curvas o por las superficies, no es imediato de ver que esta relación entre tensores métricos es una relación de equivalencia. En esas notas, no vamos a demostrar que esta relación satisface los tres criterios para definir una relación de equivalencia (reflejiva, simetrica y transitiva) (lo dejamos a los lectores como ejercicios).

Definición:
Un arco riemaniano de clase C^k es una clase de equivalencia de tensores métricos de clase C^k por esta relación.

Ejemplo:
Consideramos el siguiente tensor métrico,

$$\widetilde{g} : R^2 \setminus R_- \times \{0\} \to R^{2\times 2} : (y^1, y^2) \to \begin{pmatrix} \frac{2(y^1)^2+(y^2)^2}{(y^1)^2+(y^2)^2} & \frac{y^1y^2}{(y^1)^2+(y^2)^2} \\ \frac{y^1y^2}{(y^1)^2+(y^2)^2} & \frac{2(y^2)^2+(y^1)^2}{(y^1)^2+(y^2)^2} \end{pmatrix}$$

y el cambio de parametros:

$$\varphi : R_+^* \times]-\pi, \pi[\to R^2 \setminus R_- \times \{0\} : (x^1, x^2) \to (x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2)$$

y hallamos el tensor métrico que se deduce de $\widetilde{g}$ por el intermediario de φ.

$$\begin{aligned}
g(x^1,x^2) &= \begin{pmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 \\ -x^1 \sin x^2 & x^1 \cos x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\cos^2 x^2 & \cos x^2 \sin x^2 \\ \cos^2 x \sin x^2 & 1+\sin^2 x^2 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \cos x^2 & -x^1 \sin x^2 \\ \sin x^2 & x^1 \cos x^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El tensor métrico

$$g : R_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[\to R^{2\times 2} : (x^1,x^2) \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}$$

describo el mismo arco riemaniano que $\widetilde{g}$.

4.2 Campos de vectores tangentes

En teoria de las superficies, si $f : U \to R^3$ es una representación parametrica regular de una sabana S, darse un campo de vector tangente a S , es en cada punto $f(x^1,x^2)$ de S , darse un vector $X(x^1,x^2)$ del plano tangente a S en este punto. Este vector puede entonces, decomponerse en la base local $Jf = (\partial_1 f, \partial_2 f)$ del plano tangente:

$$\begin{aligned}
X(x^1,x^2) &= \varsigma^1(x^1,x^2).\partial_1 f(x^1,x^2) + \varsigma^2(x^1,x^2).\partial_2 f(x^1,x^2) \\
&= Jf(x^1,x^2).\begin{pmatrix} \varsigma^1(x^1,x^2) \\ \varsigma^2(x^1,x^2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Eso es equivalente a darse la función:

$$\varsigma : U \to R^2 : (x^1,x^2) \to \varsigma(x^1,x^2) = \begin{pmatrix} \varsigma^1(x^1,x^2) \\ \varsigma^2(x^1,x^2) \end{pmatrix}$$

Que paso si tentamos de escribir el mismo campo de vectores tangentes con medio de una segunda representación parametrica de S, $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to R^3$ equivalente a la primera via el cambio de parametros $\varphi : U \to \widetilde{U}$. Tenemos $f = \widetilde{f} \circ \varphi$ y $\widetilde{f} = f \circ \widetilde{\varphi}$, entonces,

$$J\widetilde{f} = (Jf \circ \widetilde{\varphi}).J\widetilde{\varphi}$$

o también,

$$J\widetilde{f} \circ \varphi = Jf.(J\widetilde{\varphi} \circ \varphi)$$

Introducimos $\widetilde{X} \equiv X \circ \widetilde{\varphi}$ y notamos $\widetilde{\varsigma}$ la colona de sus componentes en la base $J\widetilde{f}$: $\widetilde{X} \equiv J\widetilde{f}.\,\widetilde{\varsigma}$. Asi de una parte, tenemos

$$X = Jf.\varsigma$$

y de otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} X &= \widetilde{X} \circ \varphi \\ &= (J\widetilde{f} \circ \varphi).(\widetilde{\varsigma} \circ \varphi) \\ &= Jf.(J\widetilde{\varphi} \circ \varphi)(\widetilde{\varsigma} \circ \varphi) \end{aligned}$$

Comparando los resultados obtenidos, obtenemos

$$\varsigma = (J\widetilde{\varphi} \circ \varphi)(\widetilde{\varsigma} \circ \varphi)$$

Lo que se traduce componentes por componentes:

$$\varsigma^i = \sum_\alpha (\widetilde{\varsigma}^\alpha \circ \varphi)(\partial_\alpha \widetilde{\varphi}^i \circ \varphi) \tag{4.3}$$

Como algunos autores llaman $(x^1, x^2) = (\widetilde{\varphi}^1(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2), \widetilde{\varphi}^2(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2))$, usan como notación

$$\frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^\alpha} \equiv \partial_\alpha \widetilde{\varphi}^i$$

y la ecuación anterior se reescribo

$$\varsigma^i = \sum_\alpha \widetilde{\varsigma}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial \widetilde{x}^\alpha}$$

donde la composición con φ es sub-entendida.

De nuevo, en geometría riemaniana, vamos a invertir la perspectiva y vamos a tomar la ecuaciòn (4.3) como base a una definición de un campo de vectores tangentes.

Sea $k, l \in N^*$ con $k > l$ o $k = l = \infty$,

Definición:

Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ un tensor métrico de clase C^k. Una representación de un campo de vector tangentes de clase C^l relativa a g es una aplicación de clase C^l:

$$\varsigma : U \to R^2 : (x^1, x^2) \to \varsigma(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \varsigma^1(x^1, x^2) \\ \varsigma^2(x^1, x^2) \end{pmatrix}$$

Definición:

Sea $\widetilde{g} : \widetilde{U} \to R^{2\times 2}$ un segundo tensor métrico de clase C^k equivalente a g via el cambio de parametro $\varphi : U \to \widetilde{U}$ de clase C^k. Una representación de campo de vectores tangentes de clase C^l relativa a $\widetilde{g}$, $\widetilde{\varsigma} : \widetilde{U} \to R^2$ es llamada equivalente a ς en clase C^l si

$$\varsigma^i = \sum_\alpha (\widetilde{\varsigma}^\alpha \circ \varphi)(\partial_\alpha \widetilde{\varphi}^i \circ \varphi) \tag{4.4}$$

Definición:

Un campo de vectores tangentes de clase C^l a un arco riemaniano de clase C^k es una clase de equivalencia de representaciones de campos de vectores tangentes de clase C^l por la relación anterior.

Ejemplos:

Consideramos el paraboloïde de revolución de ecuación $z = x^2 + y^2$. En un punto cualquiera (x, y, z) de este paraboloïde, el vector $w = (-y, x, 0)$ es un vector tangente.

Una representación parametrica del paraboloïde es

$$f : R^2 \to R^3 : (u, v) \to (u, v, u^2 + v^2)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u, v) &= (1, 0, 2u) \\ \partial_2 f(u, v) &= (0, 1, 2v) \end{aligned}$$

Y el vector tangente w puede escribirse en función de los parametros u, v.

$$X(u, v) = (-v, u, 0)$$

admite, en la base $Jf(u, v)$ las coordenadas,

$$\varsigma(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

Pero podemos también describir el paraboloïde usando la siguiente representación:

$$\widetilde{f} : R_+^* \times R \to R^3 : (r, \theta) \to (r \cos\theta, r \sin\theta, r^2)$$

Aqui tenemos

$$\begin{aligned} \partial_1 \widetilde{f} &= (\cos\theta, \sin\theta, 2r) \\ \partial_2 \widetilde{f} &= (-r \sin\theta, r \cos\theta, 0) \end{aligned}$$

y w es igual a

$$\widetilde{X} = \partial_2 \widetilde{f}$$

de tal manera que

$$\widetilde{\varsigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El cambio de parametro es descrito por

$$\widetilde{\varphi} : R_+^* \times R \to R^2 : (r, \theta) \to \begin{pmatrix} r \cos\theta \\ r \sin\theta \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \partial_1 \widetilde{\varphi}^1(r, \theta) &= \cos\theta \\ \partial_1 \widetilde{\varphi}^2(r, \theta) &= \sin\theta \\ \partial_2 \widetilde{\varphi}^1(r, \theta) &= -r \sin\theta \\ \partial_2 \widetilde{\varphi}^2(r, \theta) &= r \cos\theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\partial_1\widetilde{\varphi}^1(\varphi(u,v)) &= \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\\
\partial_1\widetilde{\varphi}^2(\varphi(u,v)) &= \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\\
\partial_2\widetilde{\varphi}^1(\varphi(u,v)) &= -v\\
\partial_2\widetilde{\varphi}^2(\varphi(u,v)) &= u
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\varsigma^1 &= \widetilde{\varsigma}^1(\varphi(u,v)).\partial_1\widetilde{\varphi}^1(\varphi(u,v)) + \widetilde{\varsigma}^2(\varphi(u,v)).\partial_2\widetilde{\varphi}^1(\varphi(u,v))\\
&= -v\\
\varsigma^1 &= \widetilde{\varsigma}^1(\varphi(u,v)).\partial_1\widetilde{\varphi}^2(\varphi(u,v)) + \widetilde{\varsigma}^2(\varphi(u,v)).\partial_2\widetilde{\varphi}^2(\varphi(u,v))\\
&= u
\end{aligned}$$

Como el campo de vectores tangentes se transforma de la siguiente manera sobre un cambio de parametros,

$$\varsigma^i = \sum_\alpha (\widetilde{\varsigma}^\alpha \circ \varphi)(\partial_\alpha\widetilde{\varphi}^i \circ \varphi) \tag{4.5}$$

vamos a decir que el vector ς es un tensor un vez contravariante. Un tensor una vez contravariante es sinonimo de vector (tangente).

Gracias al tensor métrico, podemos definir el producto escalar de dos campos de vectores tangentes: si a y b son dos representaciones de campos de vectores tangentes sobre un arco riemaniano con g como tensor métrico:

$$\begin{aligned}
(a|b) &\equiv \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}\\
&= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta
\end{aligned}$$

Definimos la norma del campo de vectores tangentes como

$$\|a\|_g \equiv \sqrt{(a|a)}$$

Es un ejercicio facil de averiguar que esas expresiones son bien independientes del tensor métrico escogido:

$$(a|b)_g = (\widetilde{a}|\widetilde{b}) \circ \varphi$$

Para probar eso, podemos usar el hecho que

$$J(f \circ g) = (Jf \circ g).Jg$$

y aplicando eso a $f = g^{-1}$, tenemos

$$\begin{aligned}
I &= J(g^{-1} \circ g)\\
&= (Jg^{-1} \circ g).Jg\\
&= (Jg \circ g^{-1}).Jg^{-1}
\end{aligned}$$

donde I es la identidad.

4.3 Campos de tensores

4.3.1 Productos tensoriales.

Antes de definir los campos de tensores, es seguramente bueno de recuerdar lo que es un tensor. Lo haremos de manera pragmatica dejando atras los detalles y justificaciones para el curso de álgebra.

Sea K un cuerpo conmutativo y V, W dos $K-$espacios vectoriales. Su producto tensorial $V \otimes_K W$ es el K-espacio vectorial engendrado por las expresiones $v \otimes w$ llamados tensores elementales donde $v \in V$ y $w \in W$, estas expresiones satisfacen a los tres reglas de calculo siguientes:

1. $(v + v^{'}) \otimes w = v \otimes w + v^{'} \otimes w$
2. $v \otimes (w + w^{'}) = v \otimes w + v \otimes w^{'}$
3. $(kv) \otimes w = v \otimes (kw) = k(v \otimes w)$

Entonces, $V \otimes_K W$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales formales de los tensores fundamentales

$$V \otimes_K W \equiv \bigcup_{n \in N} \left\{ \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes w_k : v_i \in V, w_j \in W \right\}$$

Si $(e_1, .., e_n)$ es una base de V y $(f_1, .., f_m)$ una base de W. Entonces, $(e_1 \otimes f_1, ..., e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, ..., e_n \otimes f_m)$ es una base de $V \otimes_K W$.

Es posible de generalizar eso a productos tensoriales de varios espacios vectoriales. El caso que nos interesa es ello del producto tensorial de p copias del dual V^* de un $K-$espacio vectorial V, es decir del K-espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V en K, y de q copias de V $(p, q \in N)$:

$$\left(\bigotimes_K^p V^* \right) \otimes_K \left(\bigotimes_K^q V \right) \quad \equiv \quad \underbrace{V^* \otimes_K ... \otimes_K V^*}_{p} \otimes_K \underbrace{V \otimes_K ... \otimes_K V}_{q}$$

Si $p = q = 0$, este producto tensorial es por convención el cuerpo K mismo.

Un tensor elemental es entonces de la siguiente forma:

$$\varphi_1 \otimes ... \otimes \varphi_p \otimes v_1 \otimes ... \otimes v_q$$

donde φ_i son formas lineales sobre V, es decir aplicaciones lineales de $V \to K$ y los v_i son vectores de V. Un tal tensor es dicho p veces covariantes y q veces contravariante. Asi por ejemplo,

- un tensor una vez controvariante es sencillamente un vector
- un tensor una vez covariante es una forma lineal

- un tensor dos veces covariante es una forma bilineal
- un tensor zero vez contravariante y cero vez covariante es un escalar.

Si $e = (e_1, ..e_n)$ una base de V, definimos para cada indice i la forma lineal:

$$e^i : V \to K : \sum_\alpha a^\alpha e_\alpha \to a^i$$

La lista $e^* = (e^1, .., e^n)$ es entonces una base de V^* llamada base dual de e. Si $\varphi \in V^*$, la iesima coordenadas de φ en este base dual es $\varphi(e_i)$. En consecuencia,

$$e^{(p)}_{(q)} = (e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q})_{1 \leq i_1, ..., i_p, j_1, ..j_q \leq n}$$

es una base de $(\bigotimes^p_K V^*) \otimes_K (\bigotimes^q_K V)$. Cada tensor es caracterizado por su n^{p+q} componentes $t^{j_1 ... j_q}_{i_1 ... i_p}$ en este base:

$$t = \sum_{\alpha_1, ..\alpha_p, \beta_1 ... \beta_q} t^{\beta_1 ... \beta_q}_{\alpha_1 ... \alpha_q} (e^{\alpha_1} \otimes ... \otimes e^{\alpha_p} \otimes e_{\beta_1} \otimes ... \otimes e_{\beta_q}$$

Si $\widetilde{e} = (\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_n)$ es una segunda base de V, conocemos la matriz del cambio de base ${}_{\widetilde{e}}(I)_e$,notamos a^i_l sus elementos. Entonces, si $v = \sum_\alpha v^\alpha e_\alpha = \sum_\alpha \widetilde{v}^\alpha \widetilde{e}_\alpha \in V$,

$$\widetilde{v}^i = \sum_\alpha a^i_\alpha v^\alpha$$

Si $\varphi = \sum_\beta \varphi_\beta e^\beta = \sum_\beta \widetilde{\varphi}_\beta \widetilde{e}^\beta \in V^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \varphi(e^j) = \varphi(\sum_a a^\alpha_j \widetilde{e}_\alpha) \\ &= \sum_a a^\alpha_j \widetilde{\varphi}_\alpha \end{aligned}$$

lo que significa que ${}_{\widetilde{e}}(I)_e = (a^i_j)$ es también la matriz de cambio de base de e^* verso $\widetilde{e}^*$:

$${}_{e^*}(I)_{\widetilde{e}^*} = ({}_{\widetilde{e}}(I)_e)^{-1}$$

Si notamos b^i_j los elementos de esta matriz, tenemos

$$\widetilde{\varphi}_j = \sum_a b^\alpha_j \varphi_\alpha$$

Esas reglas de transformación sobre cambio de base se generaliza de manera imediata al caso de un tensor p veces covariantes y q veces contravariantes: cada indice covariante va a transformarse como $\widetilde{\varphi}_j$ y cada indice contravariante se transforma como $\widetilde{v}^i$.

4.3.2 Campos de tensores.

$\boxed{\text{Definición}}$:

Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ un tensor métrico de clase C^k. Una representación de un campo de tensor de clase C^k , p veces covariante y q veces contravariantes, relativo a g es una aplicación:

$$T : U \to R^{2^{p+q}}$$

de clase C^l teniendo 2^{p+q} componentes

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} : U \to R$$

$(1 \le i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q \le 2)$.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea $\widetilde{g} : \widetilde{U} \to R^{2\times 2}$ un segundo tensor métrico de clase C^k equivalente a g via el cambio de parametro: $\varphi : U \to \widetilde{U}$ de clase C^k. Una segunda representación de campo de tensores de clase C^l ,p veces covariante y q veces contravariantes, relativa a $\widetilde{g}$, $\widetilde{T} : \widetilde{U} \to R^{2^{p+q}}$ es dicha equivalente a T en clase C^l si

$$T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p} = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_p, \beta_1 \dots \beta_q} \left(T^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \right) \partial_{i_1} \varphi^{\alpha_1} \dots \partial_{i_p} \varphi^{\alpha_p} \left(\partial_{\beta_1} \widetilde{\varphi}^{j_1} \circ \varphi \right) \dots \left(\partial_{\beta_q} \widetilde{\varphi}^{j_q} \circ \varphi \right)$$

$\boxed{\text{Definición:}}$

Un campo de tensor de clase C^l ,p veces covariantes y q veces contravariantes, sobre un arco riemaniano de clase C^k es una clase de equivalencia de representaciones de campos de tensores de clase C^l, p veces covariantes y q veces contravariantes por la relación anterior.

Un ejemplo de tensor dos veces contravariantes es el tensor métrico contravariante: es sencillamente el inverso de la matriz del producto escalar local:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

Y entonces, tenemos

$$\sum_{\alpha} g^{\alpha j} g_{i\alpha} = \delta^j_i$$

Es facil de demostrar que tal objeto se transforma efectivamente como un tensor dos veces contravariante.

4.4 Arcos trazados sobre un arco riemaniano

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ un tensor métrico de clase C^k. Una representación parametrica de clase C^l de arco relativo a g es una aplicación de clase C^l:

$$c : I \to U$$

donde I es un intervalo abierto de R.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea $\widetilde{g} : \widetilde{U} \rightarrow R^{2\times 2}$ un segundo tensor métrico de clase C^k equivalente a g via el cambio de parametros $\varphi : U \rightarrow \widetilde{U}$ de clase C^k. Una representaciùon parametrica de clase C^l de arco relativo a $\widetilde{g}$, sea $\widetilde{c} : \widetilde{I} \rightarrow \widetilde{U}$ es dicha equivalente a c en clase C^l si existe un cambio de parametros de clase C^l:

$$\psi : I \rightarrow \widetilde{I}$$

tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \rightarrow^{c} & U \\ \downarrow \psi & & \downarrow \varphi \\ \widetilde{I} & \rightarrow^{\widetilde{c}} & \widetilde{U} \end{array}$$

sea conmutativo, es decir que $\widetilde{c} \circ \psi = \varphi \circ c$.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea C un arco de clase C^l trazado sobre un arco riemaniano de clase C^l, representado , relativamente al tensor métrico $g : U \rightarrow R^{2\times 2}$ por $c : I \rightarrow U$. Sea $a, b \in I$, la longitud de C es

$$L(C) \equiv \int_I \left\| c' \right\|_{g \circ c}$$

La presencia de la composición con c en el indice de la norma es indispensable si queremos disponer de una función a una variable a integrar.

Esta definición para ser valable tiene que ser independiente de las respresentaciones escogidas. Vamos a averiguarlo. Sea entonces, $\widetilde{g}$:$\widetilde{U} \rightarrow R^{2\times 2}$ y sea $\widetilde{c}$:$\widetilde{I} \rightarrow \widetilde{U}$ una representación parametrica de arco relativa a $\widetilde{g}$ equivalente a c via $\psi : I \rightarrow \widetilde{I}$. Tenemos que probar que

$$\int_I \left\| c' \right\|_{g \circ c} = \int_{\widetilde{I}} \left\| \widetilde{c}' \right\|_{\widetilde{g} \circ \widetilde{c}}$$

Por eso vamos a usar la relación de equivalencia de las representaciones parametricas de arcos:

$$\widetilde{c} \circ \psi = \varphi \circ c$$

Derivando los dos miembros de la ecuación, obtenemos

$$(\widetilde{c}' \circ \psi).\psi' = (\partial_1 \varphi \circ c).(c^1)' + (\partial_2 \varphi \circ c).(c^2)'$$

lo que puede escribirse componente por componente,

$$((\widetilde{c}'^{\,i}) \circ \psi).\psi' = \sum_{\alpha} (c^{\alpha})' (\partial_{\alpha} \varphi^i \circ c)$$

Asi podemos hacer un cambio de variable en la integral definida:

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{I}} \left\|\widetilde{c}'\right\|_{\widetilde{g}\circ\widetilde{c}} &= \int_I \left\|\widetilde{c}'\circ\psi\right\|_{\widetilde{g}\circ\widetilde{c}\circ\psi} \left|\psi'\right| \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta}(\widetilde{g}_{\alpha\beta}\circ\widetilde{c}\circ\psi)((c^\alpha)'\circ\psi)((c^\beta)'\circ\psi)}.\left|\psi'\right| \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta}(\widetilde{g}_{\alpha\beta}\circ\varphi\circ c)(((c^\alpha)'\circ\psi).\psi')(((c^\beta)'\circ\psi).\psi'} \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}(\widetilde{g}_{\alpha\beta}\circ\varphi\circ c)(c^\gamma)'(\partial_\gamma\varphi^\alpha\circ c)(c^\delta)'(\partial_\delta\varphi^\beta\circ c)} \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}(\widetilde{g}_{\alpha\beta}\circ\varphi).(\partial_\gamma\varphi^\alpha).(\partial_\delta\varphi^\beta)\circ c)(c^\gamma)'(c^\delta)'} \\
&= \int_I \sqrt{\sum_{\gamma\delta}(g_{\alpha\beta}\circ c)(c^\gamma)'(c^\delta)'} \\
&= \int_I \left\|c'\right\|_{g\circ c}
\end{aligned}$$

4.5 Los simbolos de Christoffel

Queremos ahora describir la curvatura de un arco riemaniano. Para eso, regresemos un momento en el caso de una sabana S en el espaco, descrita por la representación parametrica $f : U \to R^3$.

Vimos en el capitulo anterior que la curvatura normal de S en un punto depiende de tres derivadas parciales de orden 2 de f: $\partial^2_{1,2}f$ y $\partial_{12}f$. Entonces, suponemos que f es de clase C^2. Esas derivadas parciales de orden 2 no estan en el plano tangente . Asi no es posible de expresarlos en la base de las derivadas parciales. Pero si completamos la sucesión $(\partial_1 f, \partial_2 f)$ por el vector $\overrightarrow{u}$ normal unitario a S, obtenemos una base $(\partial_1 f, \partial_2 f, \overrightarrow{u})$ de R^3. Para cualquier vector $v \in R^3$, podemos decomponerlo en

$$v = v^1\partial_1 f + v^2\partial_2 f + v^3\overrightarrow{u}$$

o usando sus coordenadas covariantes:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (v|\partial_1 f) \\
v_2 &= (v|\partial_2 f) \\
v_3 &= (v|\overrightarrow{u})
\end{aligned}$$

Si la base es ortonormal, esas dos representaciones de v por escalares coinciden. Pero en general, $(\partial_1 f, \partial_2 f)$ no son ni unitarios, ni ortogonales. Pero $\overrightarrow{u}$ es unitario y ortogonal a los dos vectores de las derivadas parciales:

$$v^3 = v_3$$

Por las dos primeras componentes, tenemos

$$\begin{aligned} v_i &= (v|\partial_i f) \\ &= v^1(\partial_1 f|\partial_i f) + v^2(\partial_2 f|\partial_i f) \\ &= v^1 g_{1i} + v^2 g_{2i} \\ &= \sum_\alpha v^\alpha g_{\alpha i} \end{aligned}$$

Y inversamente, tenemos

$$v^i = \sum_\alpha v_\alpha g^{\alpha i}$$

Si efectuamos esos dos tipos de decomposiciones para las derivadas parciales de orden 2, las componentes en $\partial_1 f$ y en $\partial_2 f$ van a llamarse los simbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijk} &= (\partial_i\partial_j f|\partial_k f) \\ \partial_i\partial_j f &= \Gamma^1_{ij}\partial_1 f + \Gamma^2_{ij}\partial_2 f + h_{ij}\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Los Γ_{ijk} son los simbolos de Christoffel de primero especie y los Γ^k_{ij}, los simbolos de Christoffel de segundo especie.

Los coeficientes h_{ij} no son intrinsecos. De hecho, los conocemos ya:

$$\begin{aligned} h_{11} &= L \\ h_{12} &= M = h_{21} \\ h_{22} &= N \end{aligned}$$

son los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Ejemplo:

Consideramos la esfera de radio R centrada en el origen, tiene como representación parametrica:

$$f : (u, v) \to R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= R(-\sin u \cos v, -\sin u \cos v, \cos u) \\ \partial_2 f &= R(-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0) \end{aligned}$$

y

$$\partial_1 f \wedge \partial_2 f = R^2(-\cos^2 u \cos v, \cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$$

y el vector normal es

$$\overrightarrow{u} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\partial_1^2 f &= R(-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u) \\
\partial_2^2 f &= -R(\cos u \sin v, \cos u \sin v, 0) \\
\partial_1 \partial_2 f &= R(-\sin u \sin v, -\sin u \cos v, 0)
\end{aligned}$$

Los simbolos de Christoffel de primera especie son

$$\begin{aligned}
\Gamma_{111} &= 0 \\
\Gamma_{112} &= 0 \\
\Gamma_{121} &= 0 \\
\Gamma_{122} &= -R^2 \sin u \cos u \\
\Gamma_{221} &= R^2 \sin u \cos u \\
\Gamma_{222} &= 0
\end{aligned}$$

También tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_1^2 f &= -f \\
\partial_1 \partial_2 f &= -\tan u . \partial_2 f \\
\partial_2^2 f &= \sin u \cos u . \partial_1 f + R \cos^2 u . \overrightarrow{u}
\end{aligned}$$

De esas relaciones, podemos deducir imediatamente los simbolos de Christoffel de segundo especie.

Usando el teorema de Young, $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijk} &= \Gamma_{jik} \\
\Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ji}^k
\end{aligned}$$

Como ademas, los simbolos de Christoffel de primera especie y de segunda especie son respectivamente coordenadas covariantes y contravariantes, podemos obtener uno del otro usando el tensor métrico:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ijk} &= \sum_a g_{ak} \Gamma_{ij}^a \\
\Gamma_{ij}^k &= \sum_a g^{ak} \Gamma_{ija}
\end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned}
\partial_k g_{ij} &= \partial_k (\partial_i f | \partial_j f) \\
&= (\partial_k \partial_i f | \partial_j f) + (\partial_i f | \partial_k \partial_j f) \\
&= \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}
\end{aligned}$$

Permutando circularemente los indices, obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_i g_{jk} &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kij} \\
\partial_j g_{ki} &= \Gamma_{jki} + \Gamma_{jik} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}
\end{aligned}$$

Substrayendo la primera de esas tres relaciones de la suma de las dos ultimas, y dividiendo por dos, obtenemos,

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) \tag{4.6}$$

Como esta relación expresa los simbolos de Christoffel de primera especie en función de las unicas componentes del tensor métrico, observamos que es bien una cuandidad intrinseca ligada al tensor métrico. En geometría riemaniana, usamos la Ec.(4.6) como definición de los simbolos de Christoffel de primera especie:

$\boxed{\text{Definición}}$:

Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ un tensor métrico de clase C^2. Los simbolos de Christoffel de primera especie de este tensor métrico son 2^3 funciones

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) : U \to R \tag{4.7}$$

Los simbolos de Christoffel de segunda especie de este tensor métrico son las 2^3 funciones:

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_a g^{ak}\Gamma_{ija} : U \to R$$

Es importante de notar que los simbolos de Christoffel no son las componentes de un tensor 3 veces contravariantes o de un tensor 1 vez contravariante y 2 veces covariantes. Las formulas de transformación de los simbolos de Christoffel durante un cambio de parametros no son las formulas exigidas por la definición de tensor. Eso significa que los simbolos de Christoffel no son relacionado a arco riemaniano pero bien al tensor métrico.

Proposición:

Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ y $\widetilde{g} : \widetilde{U} \to R^{2\times 2}$ dos tensores métricos de clase C^2 equivalente en clase C^2 via $\varphi : U \to \widetilde{U}$. Si los Γ_{ijk} y los Γ_{ij}^k son los simbolos de Christoffel del tensor métrico g, tenemos

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{a,b,c}\left(\Gamma_{abc}\circ\varphi\right).\partial_i\varphi^a.\partial_j\varphi^b.\partial_k\varphi^c + \sum_{a,b}\left(\widetilde{g}_{ab}\circ\varphi\right).\partial_i\partial_j\varphi^a.\partial_k\varphi^b$$

y

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{a,b,c}\left(\Gamma_{ab}^c\circ\varphi\right).\partial_i\varphi^a.\partial_j\varphi^b.(\partial_c\widetilde{\varphi}^k\circ\varphi) + \sum_a \partial_i\partial_j\varphi^a.(\partial_a\widetilde{\varphi}^k\circ\varphi) \tag{4.8}$$

La demostración es directa y sin problemas.

4.6 Tensor de Riemann

Para introducir una definición riemaniana de la curvatura total, tenemos que recuerdarnos que para una sabana S en el espacio

$$\kappa_\tau = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

El denominador es una expresión intrinseca. Por el numerator, definimos

$$R_{mijk} = h_{ik}h_{jm} - h_{ij}h_{km}$$

Asi

$$\kappa_{\mathcal{T}} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

Hasta ahora, esos simbolos no son muy intrinsecos. Pero si $f : U \to R^3$ es una representación parametrica de S,

$$\begin{aligned}
R_{mijk} &= (h_{ik}\overrightarrow{u}|h_{jm}\overrightarrow{u}) - (h_{ij}\overrightarrow{u}|h_{km}\overrightarrow{u}) \\
&= \left(\partial_i\partial_k f - \sum_a \Gamma^a_{ik}\partial_a f|\partial_j\partial_m f - \sum_a \Gamma^a_{jm}\partial_a f\right) - \\
&\quad - \left(\partial_i\partial_j f - \sum_a \Gamma^a_{ij}\partial_a f|\partial_k\partial_m f - \sum_a \Gamma^a_{km}\partial_a f\right) \\
&= \partial_j\Gamma_{ikm} - \partial_k\Gamma_{ijm} + \sum_a \left(\Gamma^a_{km}\Gamma_{ija} - \Gamma^a_{jm}\Gamma_{ika}\right)
\end{aligned}$$

Para obtener este resultado usamos las relaciones entre los simbolos de Christoffel de primera especie y de segunda especie. Eso constituye una expresión intrinseca del simbolo R_{mijk} . De hecho, las funciones R_{mijk} son los 2^4 componentes de un tensor 4 veces covariantes.

Definición:

Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ un tensor métrico de clase C^3. Los 2^4 componentes del tensor de Riemann covariante del arco riemaniano representado por g son las funciones:

$$R_{mijk} \equiv \partial_j\Gamma_{ikm} - \partial_k\Gamma_{ijm} + \sum_a \left(\Gamma^a_{km}\Gamma_{ija} - \Gamma^a_{jm}\Gamma_{ika}\right)$$

Este tensor es llamado tensor de Riemann o tensor de curvatura de segunda especie.

Proposición:

El tensor de Riemann covariante se transforma como

$$R_{mijk} = \sum_{a,b,c,d} \left(\widetilde{R}_{dabc} \circ \varphi\right).\partial_m\varphi^d.\partial_i\varphi^a.\partial_j\varphi^b\partial_k\varphi^c$$

cuando pasamos del tensor métrico g a un otro tensor métrico $\widetilde{g}$ equivalente via φ.

Definición:

Las 2^4 componentes del tensor de Riemann de un arco riemaniano son las funciones:

$$R^m_{ijk} \equiv \sum_a g^{ma}R_{aijk}$$

Es también llamado tensor de Riemann o de curvatura de primera especie. Es un tensor una vez contravariante y tres veces covariante.

Proposición:

El tensor de Riemann se transforma como

$$R^m_{ijk} = \sum_{a,b,c,d} \left(\widetilde{R}^d_{abc} \circ \varphi\right).(\partial_d \widetilde{\varphi}^m \circ \varphi).\partial_i \varphi^a.\partial_j \varphi^b \partial_k \varphi^c$$

cuando pasamos del tensor métrico g a un otro tensor métrico $\widetilde{g}$ equivalente via φ.

Lema:

Para cualquier i, j, k, m tenemos

$$\partial_k \Gamma_{jmi} - \partial_j \Gamma_{kmi} = \partial_m \Gamma_{ikj} - \partial_i \Gamma_{kmj} = \partial_j \Gamma_{ikm} - \partial_k \Gamma_{ijm}$$

La demostración es un calculo directo, basado sobre la definición de los simbolos de Christoffel de primera especie.

Proposición:

Para cualquier i, j, k, m tenemos

1. $R_{jkmi} = R_{mijk}$
2. $R_{mikj} = -R_{mijk}$
3. $R_{imjk} = -R_{mijk}$
4. $R^m_{ikj} = -R^m_{ijk}$

Para el tensor de Riemann de una sabana de $E(R^3)$ tenemos

$$R_{1212} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = LN - M^2$$

y

$$R_{2112} = R_{1221} = -(LN - M^2)$$

y

$$R_{2121} = LN - M^2$$

Los 12 otras componentes de R_{mijk} son nulas.

Consecuencia: (Teorema Egregium):

La curvatura de Gauss de una sabana de clase C^3 en el espacio $E(R^3)$ es determinada por los únicos coeficientes de la primera forma fundamental.

Demostración:

De hecho, el tensor de Riemann fue introducido tal que

$$\kappa_\tau = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

Ademas R_{1212} es definido en termino de los simbolos de Christoffel y los simbolos de Christoffel se calculan a partir de las componentes del tensor métrico.

4.7 Campos de vectores a lo largo de un arco

En algunas situaciones, nos seria util de poder considerar campos de vectores tangentes a un arco riemaniano definido no sobre todo el arco pero solamente al largo de un arco trazado sobre este arco riemaniano. Un ejemplo importante de tal situación es dado por el campo de vectores tangentes a un arco que evidamente no es definido a fuera del arco.

En el caso de una sabana S en $E(R^3)$ representada por $f : U \to R^3$ y de un arco C trazado sobre S con $c : I \to U$, para darse, en un punto $f(c(t))$ de C, un vector $X(t)$ tangente a S, es necesario de darse dos componentes de este vector en la base del plano tangente que es constituido de las derivadas parciales de f, evaluadas en $c(t)$.

$$\begin{aligned} X(t) &= \varsigma^1.\partial_1 f(c(t)) + \varsigma^2.\partial_2 f(c(t)) \\ &= Jf(c(t)).\begin{pmatrix} \varsigma^1 \\ \varsigma^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como usualmente, para obtener una definición riemaniana de este tipo de campo de vectores, vamos a decir que el campo de vectores tangentes al largo de C es representado por dos funciones $\varsigma^{1,2}$, mismo si la base de las derivadas parciales no existe que en nuestra imaginación.

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea $g : U \to R^{2\times 2}$ un tensor métrico de clase C^k y sea $c : I \to U$ una representación de arco de clase C^k trazado sobre este arco riemaniano. Una representación de un campo vectorial tangentes de clase C^l relativa a g y a c es una aplicación de clase C^l:

$$\varsigma : I \to R^2 : t \to \varsigma(t) = \begin{pmatrix} \varsigma^1(t) \\ \varsigma^2(t) \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que precisar cuando dos tales representaciones tienen que ser consideradas como equivalentes. Sea $\widetilde{g} : \widetilde{U} \to R^{2\times 2}$ un segundo tensor métrico de clase C^k equivalente a g en clase C^k via $\varphi : U \to \widetilde{U}$. Y sea $\widetilde{c}$:$\widetilde{I} \to \widetilde{U}$ una representación de arco relativa a $\widetilde{g}$, equivalente a c via $\psi : I \to \widetilde{I}$, es decir $\varphi \circ c = \widetilde{c} \circ \psi$. Sea $\widetilde{\varsigma} : \widetilde{I} \to R^2$.

Intuitivamente, pensamos que $\widetilde{g}$ proviene de una representación parametrica $\widetilde{f}$ equivalente a f via φ. Intoducimos,

$$X \equiv (Jf \circ c).\varsigma$$

y

$$\widetilde{X} \equiv X \circ \widetilde{\psi}$$

y notamos $\widetilde{\varsigma}$ la colona de las componentes de $\widetilde{X}$ en la base $(J\widetilde{f} \circ \widetilde{c})$. Asi, tenemos

$$\widetilde{X} \equiv (J\widetilde{f} \circ \widetilde{c}).\widetilde{\varsigma}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} X &= \widetilde{X} \circ \psi \\ &= (J\widetilde{f} \circ \widetilde{c} \circ \psi).(\widetilde{\varsigma} \circ \psi) \\ &= (J\widetilde{f} \circ \varphi \circ c).(\widetilde{\varsigma} \circ \psi) \\ &= (Jf \circ c).(J\widetilde{\varphi} \circ \varphi \circ c).(\widetilde{\varsigma} \circ \psi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varsigma = (J\widetilde{\varphi} \circ \varphi \circ c).(\widetilde{\varsigma} \circ \psi)$$

Sea explicitamente

$$\begin{pmatrix} \varsigma^1(t) \\ \varsigma^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1\widetilde{\varphi}^1 \circ \varphi \circ c & \partial_2\widetilde{\varphi}^1 \circ \varphi \circ c \\ \partial_1\widetilde{\varphi}^2 \circ \varphi \circ c & \partial_2\widetilde{\varphi}^2 \circ \varphi \circ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\varsigma}^1(t) \circ \psi \\ \widetilde{\varsigma}^2(t) \circ \psi \end{pmatrix}$$

o también, componente por componente,

$$\varsigma^i = \sum_a (\widetilde{\varsigma}^a \circ \psi)(\partial_a \widetilde{\varphi}^i \circ \varphi \circ c)$$

En la perspectiva riemaniana, este igualdad va a servir a definir la relación de equivalencia entre esos dos representaciones.

Definición:

Sea $\widetilde{g} : \widetilde{U} \to R^{2\times 2}$ un segundo tensor métrico de clase C^k equivalente a g via el cambio de parametro $\varphi : U \to \widetilde{U}$ de clase C^k. Sea $\widetilde{c} : \widetilde{I} \to \widetilde{U}$ una representación de arco de clase C^k relativa a $\widetilde{g}$, equivalente a c en clase C^k via $\psi : I \to \widetilde{I}$. Una representación de campo de vectores tangentes de clase C^l relativa a $\widetilde{g}$ y a $\widetilde{c}$, $\widetilde{\varsigma} : \widetilde{I} \to R^2$ es dicha equivalente a ς en clase C^l si

$$\varsigma^i = \sum_a (\widetilde{\varsigma}^a \circ \psi)(\partial_a \widetilde{\varphi}^i \circ \varphi \circ c) \tag{4.9}$$

Definición:

Un campo de vectores tangente de clase C^l a un arco riemaniano de clase C^k al largo de un arco trazado de clase C^k es una clase de equivalencia de representaciones de campos de vectores tangentes de clase C^l por la relación anterior.

4.8 Derivada covariante

Una vez que tenemos esta noción de campo de vectores tangentes al largo de un arco trazado sobre un arco riemaniano, deseamos poder derivar tal campo para medir sus variaciones. Estaria preferable que la derivada sea un campo de misma naturaleza.

Consideramos de nuevo para tener una intuición de la noción de derivada covariante, un campo de vector tangentes al largo de un arco trazado en una sabana en $E(R^3)$. Si derivamos este campo (usando como variable el parametro usado para representar el arco), el resultado es un campo de vectores que no tiene ningun razon de ser tangente a la sabana.

Por ejemplo, tomamos los vectores tangentes unitarios a un paralelo de una esfera, parametrizado por la abscisa curvilinea: derivar este campo nos da, en cada punto, el vector curvatura del paralelo que es normal al paralelo y contenido en su plano.

La solución que vamos a adoptar para remediar a este problema es de proyetar sobre el plano tangente los vectores obtenidos por derivación. Vamos a llamar derivada covariante del campo de vectores tangentes a la sabana al largo del arco, la proyección ortogonal de la derivada usual sobre el plano tangente a la sabana.

En nuestro ejemplo; esta proyección nos da en cada punto del paralelo un vector tangente al meridiano de este punto.

Si como antes, el campo es

$$X(t) = \sum_a \varsigma^a(t).\partial_a f(c(t))$$

$$\Rightarrow X^{'}(t) = \sum_a (\varsigma^a)^{'}(t).\partial_a f(c(t)) + \sum_{b,d} \varsigma^b(t).\partial_b\partial_d f(c(t)).(c^d)^{'}(t)$$

La primera suma es en el plano tangente, la segundo no lo es como

$$\partial_b\partial_d f = \sum_a \Gamma^a_{bd}\partial_a f + h_{bd}\overrightarrow{u}$$

Asi la proyección ortogonal de $\partial_b\partial_d f$ sobre el plano tangente es $\sum_a \Gamma^a_{bd}\partial_a f$. La derivada covariante vale entonces

$$\nabla_c X(t) = \sum_a \left((\varsigma^a)^{'}(t) + \sum_{b,d} \Gamma^a_{bd}(c(t)).\varsigma^b(t).(c^d)^{'}(t) \right) .\partial_a f(c(t))$$

De nuevo, vamos a usar esta relación como una definición riemaniana de la derivada covariante.

Definición:

Sea g un tensor métrico de clase C^k y sea c una representación de arco de clase C^k relativa a g. Sea ς una representación de campo de vectores tangentes de clase C^l relativa a g y a c. La derivada covariante de ς al largo de c es la representación de campo de vectores tangentes $\nabla_c\varsigma$ de componentes:

$$\nabla_c\varsigma^i = (\varsigma^i)^{'} + \sum_{b,d} (\Gamma^i_{bd} \circ c).\varsigma^b(t).(c^d)^{'}$$

Ahora tenemos que responder a la pregunta de como la derivada covariante se transforma durante un cambio de representaciones. Para responder a eso, vamos a usar las siguientes relaciones:

$$X \equiv (Jf \circ c).\varsigma = \left((J\widetilde{f} \circ \widetilde{c}).\widetilde{\varsigma} \right) \circ \psi$$

Derivando esos dos expresiones y proyetando sobre el plano tangentes, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \left[(\varsigma^i)' + \sum_{b,d} (\Gamma^i_{bd} \circ c).\varsigma^b(t).(c^d)' \right] .(\partial_i f \circ c) = \\
= \quad & \left(\left(\sum_i \left[(\widetilde{\varsigma}^i)' + \sum_{b,d} (\widetilde{\Gamma}^i_{bd} \circ \widetilde{c}).\widetilde{\varsigma}^b(t).(\widetilde{c}^d)' \right] .(\partial_i \widetilde{f} \circ \widetilde{c}) \right) \circ \psi \right) .\psi' \\
= \quad & \left(\sum_i \left[(\widetilde{\varsigma}^i)' + \sum_{b,d} (\widetilde{\Gamma}^i_{bd} \circ \widetilde{c}).\widetilde{\varsigma}^b(t).(\widetilde{c}^d)' \right] \circ \psi \right) .\psi' .(\partial_i \widetilde{f} \circ \varphi \circ c)
\end{aligned}
$$

Como $\partial_i \widetilde{f} = \sum_a (\partial_a f \circ \widetilde{\varphi}).\partial_i \widetilde{\varphi}^a$, entonces

$$
(\partial_i \widetilde{f} \circ \varphi \circ c) = \sum_a (\partial_a f \circ c).(\partial_i \widetilde{\varphi}^a \circ \varphi \circ c)
$$

Usando este resultado en la Ec. anterior, obtenemos

$$
(\nabla_c \varsigma)^i = \sum_a \left((\nabla_{\widetilde{c}} \widetilde{\varsigma})^a \circ \psi \right) .\psi' . \left(\partial_a \widetilde{\varphi}^i \circ \varphi \circ c \right) \tag{4.10}
$$

Esta relación va a definir como la derivada covariante se transforma bajo un cambio de parametro. No vamos a hacer la demostración formal de esta propiedad.

Vamos nadamas a ver dos casos particulares interesantes.

1. Si no cambiamos el tensor métrico, entonces $\varphi = I_U$ y $c = \widetilde{c} \circ \psi$ y usando Ec.(4.10), tenemos

$$
(\nabla_{\widetilde{c} \circ \psi} (\widetilde{\varsigma} \circ \psi))^i = \left((\nabla_{\widetilde{c}} \widetilde{\varsigma})^i \circ \psi \right) .\psi'
$$

2. Si cambiamos el tensor métrico pero no la representación c, obtenemos

$$
(\nabla_c \varsigma)^i = \sum_a \left((\nabla_{\widetilde{c}} \widetilde{\varsigma})^a \right) . \left(\partial_a \widetilde{\varphi}^i \circ \widetilde{c} \right)
$$

El caso general puede ser reconstituido usando esos dos resulados.

Es util de disponer de unas reglas de calculo de las derivadas covariantes:

Proposición:

Sea g un tensor métrico de clase C^k y sea c una representación de arco de clase C^k relativa a g. Sea ς y χ dos representaciones de campos de vectores tangentes de clase C^l relativa a g y a c. Sea $f : I \to R$ derivable y $a, b \in R$. En esas condiciones, tenemos

1. $\nabla_c (a\varsigma + b\chi) = a\nabla_c \varsigma + b\nabla_c \chi$

2. $\nabla_c(f.\varsigma) = f^{'}.\varsigma + f.\nabla_c\varsigma$

3. $(\varsigma|\chi)^{'}_{g\circ c} = (\nabla_c\varsigma|\chi)_{g\circ c} + (\varsigma|\nabla_c\chi)_{g\circ c}$

Ejemplos:

Nos damos un campo de vectores tangentes de clase C^1 a un arco riemaniano. Por eso, consideramos una representación $\varsigma : U \to R^2$ de campo de vectores tangentes relativo a un tensor métrico g.

Consideramos también la curva de coordenadas $x^2 = x^2_*$, es representada por

$$c_{(\_,x^2_*)} : U_{(\_,x^2_*)} \to U : x^1 \to (x^1, x^2_*)$$

donde $U_{(\_,x^2_*)} = \{x^1$ tal que $(x^1, x^2) \in U\}$. La composición de ς da una aplicación:

$$\varsigma \circ c_{(\_,x^2_*)} : U_{(\_,x^2_*)} \to R^2 : t \to \varsigma(t, x^2_*)$$

que representa la restricción del campo de vectores al largo de la curva de coordenadas.

La derivada covariante de $\varsigma \circ c_{(\_,x^2_*)}$ al largo de $c_{(\_,x^2_*)}$ que vamos a llamar **la primera derivada covariante parcial de** ς que vamos a notar

$$(\nabla_1\varsigma)(x^1, x^2_*) \equiv \left(\nabla_{c_{(\_,x^2_*)}}(\varsigma \circ c_{(\_,x^2_*)})\right)(x^1)$$

En el caso concreto donde g es la metrica de una sabana S en R^3, $\nabla_1\varsigma$ es la proyección sobre el plano tangente a S de la derivada parcial ordinaria $\partial_1\varsigma$.

Podemos hallar facilmente su expresión y obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \nabla_1\varsigma & : & U \to R^2 \\ (x^1, x^2) & \to & \nabla_1\varsigma^i(x^1, x^2) = \left(\partial_1\varsigma^i(x^1, x^2) + \sum_a \Gamma^i_{a1}(x^1, x^2).\varsigma^a(x^1, x^2)\right)_{1\leq i\leq 2} \end{array}$$

O de otra manera,

$$(\nabla_1\varsigma)^i = \partial_1\varsigma^i + \sum_a \Gamma^i_{a1}.\varsigma^a$$

De la misma manera, podemos componer ς con

$$c_{(x^1_*,\_)} : U_{(x^1_*,\_)} \to U : x^2 \to (x^1_*, x^2)$$

Procedando de la misma manera que antes, eso va a darnos **la segunda derivada covariante parcial** del campo de vectores representado por ς.

$$\begin{array}{rcl} \nabla_2\varsigma & : & U \to R^2 \\ (x^1, x^2) & \to & \nabla_2\varsigma(x^1, x^2) = \left(\partial_2\varsigma^i(x^1, x^2) + \sum_a \Gamma^i_{a2}(x^1, x^2).\varsigma^a(x^1, x^2)\right)_{1\leq i\leq 2} \end{array}$$

O de otra manera,

$$(\nabla_2\varsigma)^i = \partial_2\varsigma^i + \sum_a \Gamma^i_{a2}.\varsigma^a$$

Ejemplos:

1. Tomamos para campo de vectores tangentes "la primera derivada parcial", es decir el campo representado por $\varsigma(x^1, x^2) = (1, 0)$. Entonces, tenemos

$$\nabla_1\varsigma = (\Gamma^1_{11}, \Gamma^2_{11})$$
$$\nabla_2\varsigma = (\Gamma^1_{12}, \Gamma^2_{12})$$

De la misma manera si $\varsigma(x^1, x^2) = (0, 1)$, tenemos

$$\nabla_2\varsigma = (\Gamma^1_{22}, \Gamma^2_{22})$$
$$\nabla_2\varsigma = (\Gamma^1_{12}, \Gamma^2_{12})$$

Si la representación del campo de vectores ς es de clase superior o igual a dos, podemos reiterar este proceso y calcular $\nabla_2\nabla_2, \nabla_1\nabla_1$ o $\nabla_1\nabla_2$. Pero es importante de observar que al contrario de las derivadas parciales usuales, las derivadas parciales covariantes no comutan en general!

$$\nabla_2\nabla_1\varsigma \neq \nabla_1\nabla_2\varsigma$$

2. Tomamos de nuevo $\varsigma(x^1, x^2) = (1, 0)$, podemos hallar

$$\nabla_2\nabla_1\varsigma = (\partial_2\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}, \partial_2\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11})$$
$$\nabla_1\nabla_2\varsigma = (\partial_1\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12}, \partial_1\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12})$$

Esos dos campos de vectores no parecen ser iguales. De hecho, podemos ilustrarlo en el caso de la esfera. En este caso, el tensor métrico es

$$g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ & R^2\cos^2 x^1 \end{pmatrix}$$

Usando los simbolos de Christoffel correspondiente a esta metrica, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_2\nabla_1(1, 0) &= 0 \\ \nabla_1\nabla_2(1, 0) &= (0, -1) \end{aligned}$$

El hecho que la diferencia $\nabla_2\nabla_1\varsigma - \nabla_1\nabla_2\varsigma$ es diferente de cero es relacionado a la curvatura del arco de Riemann. Este punto deberia ser desarrollado en un curso ulterior.

4.9 Campos de vectores paralelos

Introducimos la noción importante de campos de vectores paralelos. Son campos de vectores que parecen equipolentes a los habitantes de la superficies cuando ellos recorren el arco al largo del cual el campo es definido.

Definición:

Un campo de vectores tangentes de clase C^l a un arco riemaniano de clase C^k al largo de un arco trazado de clase C^k es dicho campo de vectores paralelo si su derivada covariante es nula.

Notas:

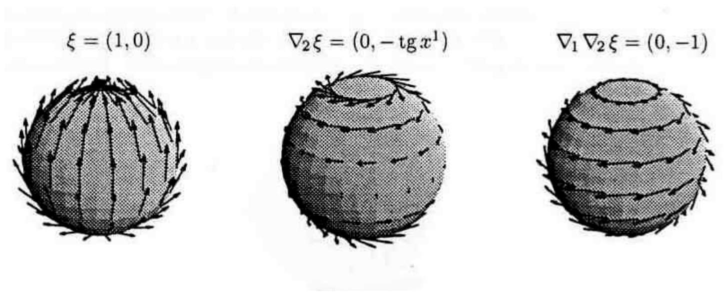

Figura 4.1:

1. la denominación "vectores paralelos" no es perfectamente adecuada por que en geometría afin, vectores paralelos son vectores multiples de uno del otro pero aqui, hablamos de vectores iguales.

2. Es facil de averiguar que si la derivada covariante es cero en una de las representaciones del campo de vectores tangentes es nula en cada representación equivalente. Entonces, la noción de campo de vectores paralelos es bien una propiedad del campo de vectores y no de la representación particular.

3. Los vectors de un campo de vectores paralelos son paralelos para los habitantes de la superficie! Pero si la estructura riemaniana proviene de una superficie immersa en $E(R^3)$ no los vemos necesariamente como vectores paralelos. Por ejemplo, los vectores tangentes unitarios a un gran circulo de la esfera forman un campo de vectores paralelos y en puntos diametralamente opuesto, los vectores del campos son de sentido opuesto.

4. Seria falso de imaginarse que un campo de vectores paralelos es una función constante:
$$\varsigma : I \to R^2$$
De hecho, ς no es strictamente hablando un vector del campo pero mas correcto la colona de sus componentes en la base (fantasma) de sus derivadas parciales que son ellas en general no constantes. Es suficiente regresar a la definición de la derivada covariante para darse cuenta que $\nabla_c \varsigma = 0$ y $\varsigma =$ constante son en general propiedades independientes una del otro. Pero son bien equivalente si los simbolos de Christoffel son nulos al largo del arco.

Ejemplos:

Sobre la esfera de radio R centrada en el origen, consideramos el paralelo de latitude $u_0(-\pi/2 < u_0 < \pi/2)$. Al largo de este paralelo, consideramos el campo de vectores:
$$\varsigma : R \to R^2 : t \to (1/R, 0)$$

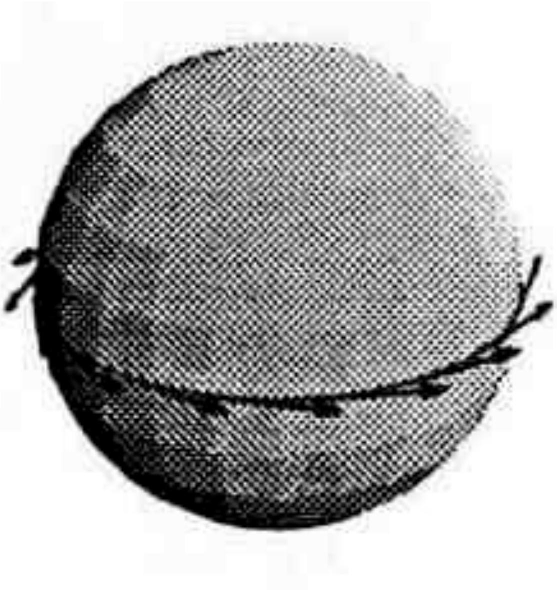

Figura 4.2:

Es en cada punto del paralelo, el vector tangente en la dirección del norte. Esos vectores son un campo de vectores paralelos? Para responder a este pregunta, podemos razonar en $E(R^3)$. El paralelo es representado por

$$p : R \to R^3 : t \to (R \cos u_0 \cos t, R \cos u_0 \sin t, R \sin u_0)$$

El campo de vectores es

$$X(t) = (-\sin u_0 \cos t, -\sin u_0 \sin t, \cos u_0)$$

Su derivada es

$$X^{'}(t) = (\sin u_0 \sin t, -\sin u_0 \cos t, 0)$$

vector que es nulo si y solamente si $u_0 = 0$. Ademas, para $u_0 \neq 0$, $X^{'}(t)$ es horizontal y no tiene una proyección nula sobre el plano tangente como este no es vertical. Asi la derivada covariante de X es nula si y solamente si $u_0 = 0$ es decir cuando el paralelo escogido es el ecuator. En los otros casos, el campo de vector no es un campo de vectores paralelos.

Hay todavia un punto a mencionar. Si nos damos sobre un arco riemaniano dos arcos trazados C y D con dos puntos comunes P y Q. Consideramos sobre cada de esos arcos, un campo de vectores paralelos, esos dos campos coinciden en el punto P, podemos deducir que esos dos campos van a coincidir en Q? La respuesta es no!

Un ejemplo facil a visualisar es el siguiente: la superficie es una esfera centrada en el origen. Los arcos C y D son respectivamente los meridianos contenidos en el plano Oxz, del lado de los x positivos y en el plano Oyz del lado

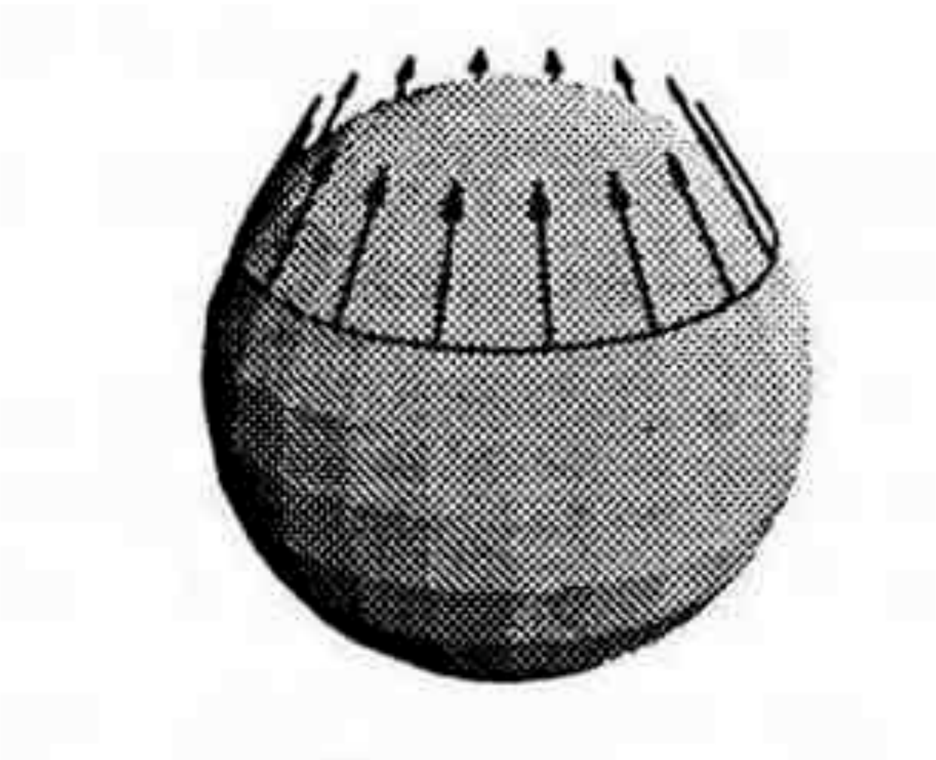

Figura 4.3:

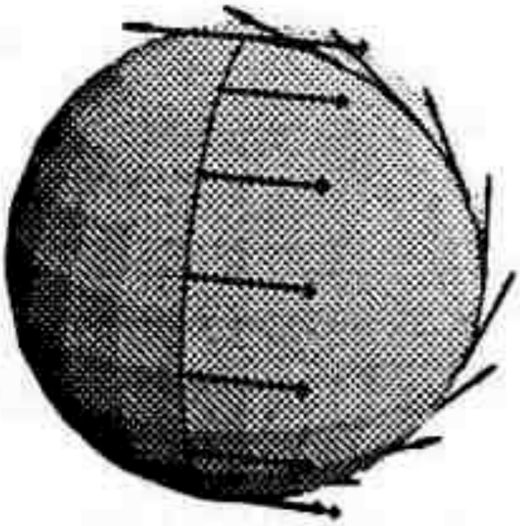

Figura 4.4:

de los y positivos. P es el polo sur y Q es el polo norte. En cada punto de C, plazamos un vector unitario dirigido al este y en cada punto de D, plazamos el vector unitario dirigido hasta el norte. En el polo sur, los vectores de los dos campos son iguales pero en el polo norte, los dos vectores son opuestos uno del otro.

Una vez mas, eso es relacionado a la curvatura del arco de Riemann.

Proposición:

Sea C un arco trazado sobre un arco riemaniano, sea ς y $\chi : I \to R^2$ dos campos de vectores paralelos al largo de C. En esas condiciones, las funciones $\|\varsigma\|_{goc}$ y $(\varsigma|\chi)_{goc} : I \to R$ son constantes.

Demostración evidente usando las propiedades del producto escalar y de la derivada covariante.

Proposición:

Sea C un arco trazado sobre un arco riemaniano, sea P un punto de C y $v \in R^2$. Existe un único campo ς_v de vectores paralelos al largo de C tomando en P el valor v. Ademas, cualquier sea el punto Q de C, la aplicación de $R^2 \to R^2$ que asocia a v el valor en Q del campo ς_v sea

$$v \to \varsigma_v(Q)$$

es una isometria.

4.10 Curvatura geódesica

Definimos la curvatura geodesica en el capitulo anterior. La curvatura geodesica de un arco trazado sobre una sabana es la componente de la curvatura de este arco en la dirección del plano tangente a la curva. Aqui, para simplificar, no vamos a buscar a darlo un signo. Vamos siempre a tomarlo como la norma del vector de curvatura geodesica que es la proyección del vector de curvatura sobre el plano tangente.

Consideramos sobre una sabana de $E(R^3)$ representada por $f : U \to R^3$ un arco dado por una representación normal $\overline{c} : J \to U$. El vector de curvatura geodesica es la proyeccion en el plano tangente del vector de curvatura del arco, es decir es la proyecció n sobre el plano tangente de la derivada del vector tangente al arco. Entonces, es la derivada covariante del campo de vectores $\overrightarrow{t}$ tangentes (unitarios) al arco.

$$\overrightarrow{\kappa_g} \equiv \nabla_{\overline{c}} \overrightarrow{t}$$

Cuanto a la curvatura geodesica (escalar), es la norma del vector anterior:

$$\kappa_g \equiv \left\| \nabla_{\overline{c}} \overrightarrow{t} \right\|$$

$\boxed{\text{Definición:}}$

Sea $\overline{c} : J \to U$ una representación de clase C^2 de un arco trazado, relativo a un tensor métrico $g : U \to R^{2\times 2}$ normal en el sentido que $\|\overline{c}\|_{g\circ c} = 1$. La curvatura geodesica del arco representado por $\overline{c}$ sobre el arco riemaniano representado por g es

$$\kappa_g \equiv \left\| \nabla_{\overline{c}} \overline{c}' \right\|_{g\circ\overline{c}}$$

Consideramos ahora relativamente al tensor métrico g, una representación de arco trazado, $c : I \to U$ regular y de clase C^2 y suponemos que esta representación no es normal. Entonces, si escogimos $t_0 \in I$, y definiendo

$$\sigma(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \left\| c' \right\|_{g\circ c}$$

entonces, $\overline{c} \equiv c \circ \sigma^{-1}$ es una representación normal de arco trazado relativo a g.

Si $\varsigma : I \to R^2$ es una representaciùon de campo de vectores tangentes relativo a c y a g, la representación correspondiente, relativa a $\overline{c}$ y a g es $\overline{\varsigma} \equiv \varsigma \circ \sigma^{-1}$. Usando las reglas de transformación de la derivada covariante, tenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\overline{c}} \overline{\varsigma} &= \nabla_{c\circ\sigma^{-1}} (\varsigma \circ \sigma^{-1}) \\
&= \left(\nabla_c \varsigma \circ \sigma^{-1} \right) . (\sigma^{-1})' \\
&= \left(\nabla_c \varsigma \circ \sigma^{-1} \right) . \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma'} . \nabla_c \varsigma \right) \circ \sigma^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{\|c'\|_{g\circ c}} . \nabla_c \varsigma \right) \circ \sigma^{-1}
\end{aligned}$$

En particular, cuando $\overline{\varsigma} = \overline{c'}$,

$$\begin{aligned} \varsigma &= \overline{\varsigma} \circ \sigma \\ &= \overline{c}^{'} \circ \sigma \\ &= \frac{(\overline{c} \circ \sigma)^{'}}{\sigma^{'}} \\ &= \frac{c^{'}}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \left\| \nabla_{\overline{c}} \overline{c}^{'} \right\|_{g\circ\overline{c}} \\ &= \left\| \left(\frac{1}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} . \nabla_c \left(\frac{c^{'}}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} \right) \right) \right\|_{g\circ c} \circ \sigma^{-1} \end{aligned}$$

o de otra manera,

$$\begin{aligned} \kappa_g \circ \sigma &= \left\| \left(\frac{1}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} . \nabla_c \left(\frac{c^{'}}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} \right) \right) \right\|_{g\circ c} \\ &= \frac{1}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} \left\| \nabla_c \left(\frac{c^{'}}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} \right) \right\|_{g\circ c} \end{aligned}$$

<u>Ejemplos:</u>

Hallamos la curvatura geodesica de un paralelo, representado por $c(t) \equiv (x^1_*, t)$ sobre la esfera de radio R y centrada en el origen. El tensor métrico es

$$g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ & R^2 \cos^2 x^1 \end{pmatrix}$$

Asi tenemos $c'(t) = (0, 1)$ y entonces, $\|c'(t)\|_{g\circ c} = R \cos x^1_*$. De alla, tenemos

$$\frac{c^{'}}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} = (0, \frac{1}{R \cos x^1_*})$$

y usando los simbolos de Christoffel, tenemos

$$\nabla_c \left(\frac{c^{'}}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} \right) = \left(\frac{\sin x^1_*}{R}, 0 \right)$$

Entonces,

$$\left\| \nabla_c \left(\frac{c^{'}}{\|c^{'}\|_{g\circ c}} \right) \right\|_{g\circ c} = \left| \sin x^1_* \right|$$

y entonces,

$$\begin{aligned}\kappa_g \circ \sigma &= \left\| \left(\frac{1}{\|c'\|_{g\circ c}} . \nabla_c \left(\frac{c'}{\|c'\|_{g\circ c}} \right) \right) \right\|_{g\circ c} \\ &= \frac{\left|\tan x_*^1\right|}{R}\end{aligned}$$

Esta curvatura geodesica es nula solamente para el paralelo considerado en el ecuator.

4.11 Geódesicas

Las geodesicas son los arcos trazados sobre una sabana que, para los habitantes de esta sabana, parecen ser lineas rectas. Lo que significa que su curvatura geodesica son nula pero solamente su curvatura geodesica!

Definición:

Un arco trazado sobre un arco riemaniano es una geodesica si su curvatura geodesica es nula en todo punto.

Proposición:

Sea $c : I \to U$ *una representación de clase* C^2 *de arco trazado , relativo a un tensor métrico* g*. Las dos siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *el arco representado por* c *es una geodesica y* $\left\|c'\right\|_{g\circ c}$ *es una constante*
2. *Para* $i = 1, 2$
$$\left(c^i\right)'' + \sum_{a,b} \left(\Gamma^i_{ab} \circ c\right) . \left(c^a\right)' . \left(c^b\right)' = 0$$

   Esas ecuaciones son conocidas como **las ecuaciones de Euler**.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) : se demuestra directamente a partir de la definición de geodesica (y curvatura geodesica) y de la definición de la derivada covariante.

(2) $\Rightarrow$ (1): Empezamos con la definición:

$$\left\|c'\right\|^2_{g\circ c} = \sum_{a,b} \left(g_{ab} \circ c\right) . \left(c^a\right)' . \left(c^b\right)'$$

y derivando esta expresión y usando las propiedades de los simbolos de Christoffel. Y probamos que

$$\left(\left\|c'\right\|^2_{g\circ c}\right)' = 0$$

Entonces, $\left\|c'\right\|_{g\circ c} = cste = k$ y el mismo calculo que en la primera parte nos enseña que $k^2 \left(\kappa_g \circ \sigma\right) = 0$

Sabemos que en el plano, por cada punto, pasa una y una unica linea recta en cada dirección. La siguiente proposición generaliza esta propiedad a las geodesicas de un arco riemaniano.

Proposición:

Sea S un arco riemaniano de clase C^2; en cada punto de S, en cada dirección , existe uno y un único arco de geodesica trazado sobre S pasando por este punto y admitiendo un vector tangente paralelo a la dirección dada.

Capitulo 5

Ejercicios.

1. Sea los vectores $u = (1, 2, 3)$ y $v = (-1, 4, 3)$ y el punto $P = (0, 0, 1)$.

   - Verificar que u y v son linealmente independiente.
   - Dar las ecuaciones vectoriales, parametricas y cartesianas de la linea recta vectorial d_0 apoyandose sobre el vector u, del plano vectorial π_0 apoyandose sobre los vectores u y v.
   - Dar las ecuaciones vectoriales, parametricas y cartesianas de la linea recta afin d paralela a u y pasando por el punto P, y del plano afin π paralelo a u y v y pasando por el punto P.

2. Sea los puntos

$$\begin{aligned} A &= (-1, 4, 3) \\ B &= (1, 2, 3) \\ C &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

   Hallar las ecuaciones vectorial, parametricas y cartesianas de

   - la linea recta $d' = BC$
   - del plan ABC

3. Sea

$$\begin{aligned} A &= (1, 2, 1) \\ B &= (1, 0, 1) \\ C &= (0, 2, 0) \\ D &= (1, 3, -2) \end{aligned}$$

   Dar las ecuaciones vectoriales, parametricas y cartesianas del plan P pasando por A y B y paralelo a CD.

4. Hallar las ecuaciones parametricas para los planes de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} a) & x+3y-z-2=0 \\ b) & x+y-1=0 \\ c) & 3x-y+5z=17 \\ d) & x-5z=17 \\ e) & 3x-y=0 \\ f) & y=-8 \end{array}$$

5. Hallar las ecuaciones parametricas para las lineas rectas de ecuaciones

$$\begin{array}{ll} a) & \begin{cases} x+3y-z=1 \\ x+y=1 \end{cases} \\ b) & \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{3} \\ c) & \frac{x-1}{3}=1-y=\frac{z+2}{4} \\ d) & \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y=5 \end{cases} \end{array}$$

6. Hallar las ecuaciones cartesianas de la linea recta paralela a d y pasando por el punto P:

$$\begin{array}{lll} a) & d \equiv \begin{cases} x+3y-z=1 \\ x+y=1 \end{cases} & P=(-1,2,2) \\ b) & d \equiv \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=t-3 \end{cases} & P=(0,0,1) \end{array}$$

7. Determinar si los triplets $(E, V, \overrightarrow{(--)})$ siguientes son espacios afines. Si la respuesta es afirmativa, dar la suma de un punto y de un vector:

$$\begin{array}{ll} a) & E=Z^2, V=R^2, \overrightarrow{(z_1,z_2)(z_1^{'}z_2^{'})}=(z_1^{'}-z_1, z_2^{'}-z_2) \\ b) & \begin{array}{c} E=R^3, V=R^3 : \overrightarrow{(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)}= \\ (k(y_1-x_1), k(y_2-x_2), k(y_3-x_3)) \end{array} \\ c) & \begin{array}{c} E=R^3, V=R^3 : \overrightarrow{(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)}= \\ (y_2-x_2, y_1-x_1, y_3-x_3) \end{array} \\ d) & \begin{array}{c} E=R^3, V=R^2 : \overrightarrow{(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)}= \\ (y_1-x_1, y_2-x_2) \end{array} \\ e) & \begin{array}{c} E=R^4, V=C^2 : \overrightarrow{(x_1,x_2,x_3,x_4)(y_1,y_2,y_3,y_4)}= \\ ((y_1-x_1)+i(y_3-x_3), (y_4-x_4)+i(y_2-x_2)) \end{array} \\ f) & E=C, V=C : \overrightarrow{zz'}=\overline{z'-z} \end{array}$$

8. Determinar si las siguientes aplicaciones son representaciones parametricas

de curvas o de arcos de curvas y determinar su clase:

$$\begin{array}{ll}
a) & f: R \to R^2 : t \to (t^2, \cos t^2) \\
b) & f: R \to R^2 : t \to (|t|, \sin t) \\
c) & f: R \to R^2 : t \to \begin{cases} (t^2, t^2 \sin 1/t) & t > 0 \\ (t^2, 0) & t \leq 0 \end{cases} \\
d) & f: R_+^* \to R^2 : t \to \begin{cases} (\cos t, \sin t) & 2\pi \geq t > 0 \\ (1, t - 2\pi) & t > 2\pi \end{cases} \\
e) & f:]-1,1[\to R^2 : t \to (0, t^n) \\
f) & f:]-1,1[\to R^2 : t \to (t, t^n) \\
g) & f: [0, 2\pi] \to R^2 : t \to (\cos t/2, \sin t/2)
\end{array}$$

9. Ponemos para cualquier n impar, $f_n : R \to R^2 : t \to (t^n, t^m)$, determinar si cuando $m \neq n$ las representaciones parametricas f_m y f_n son equivalentes, en cual clase?

10. Buscar los puntos singulares de las representaciones parametricas siguientes:

$$\begin{array}{ll}
a) & f: R \to R^2 : t \to (|t|, \sin t) \\
b) & f: R_+^* \to R^2 : t \to \begin{cases} (\cos t, \sin t) & 2\pi \geq t > 0 \\ (1, t - 2\pi) & t > 2\pi \end{cases} \\
c) & f:]-1,1[\to R^2 : t \to (0, t^n) \\
d) & f:]-1,1[\to R^2 : t \to (t, t^n)
\end{array}$$

11. Representar graficamente la curva representada por

$$f: R \to R^2 : t \to (6 \sin t - 2 \sin 3t, 6 \cos t - 3 \cos 2t)$$

y hallar sus puntos singulares.

12. Determinar los puntos multiples de las curvas de R^2 representadas por las ecuaciones implicitas siguientes. Dar las representaciones parametricas para cada una de ellas:

$$\begin{array}{ll}
a) & xy = 0 \\
b) & x^2 = 1 \\
c) & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
d) & 3axy = x^3 + y^3 \\
e) & (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \\
f) & (x^2 + 2ay - a^2)^2 = y^2(a^2 - x^2)
\end{array}$$

13. Dar una ecuación implicita describiendo la curvas de siguientes representaciones parametricas:

$$\begin{array}{ll}
a) & f: R \to R^2 : t \to (\cos 2t, \sin 2t) \\
b) & f:]0, 2\pi[\to R^2 : t \to (\cosh t, \sinh t) \\
c) & f: R \to R^2 : t \to (\cos t, \sin t) \\
d) & f: R \to R^2 : t \to (\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2})
\end{array}$$

14. Escribir la ecuación de la tangente en un punto regular cualquiera de la curva:
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

15. Determinar los puntos del elipsa
$$\begin{cases} x = 2\cos t + \sin t \\ y = 2\cos t - \sin t \end{cases}$$
en cuales la normal pasa por el origen.

16. Hallar la envolvente de las siguientes familias de curvas:
    - de la familia de lineas rectas:
    $$ax - y = a^2/2$$
    - de la familia de circulos:
    $$(x-a)^2 + y^2 - 2a = 0$$
    - de las normales a la parabola:
    $$y = (x/2)^2 - 1$$
    - de la familia de circulos:
    $$(x-a^3)^2 + y^2 = 1$$
    - de la familia de hiperbola:
    $$xy - y^2 - ax + (2a-3)y = a^2 - 3a$$
    - de la familia de conicas:
    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1-a} = 1$$

17. Hallar la longitud
    - de un arco de la cycloida:
    $$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$
    - de la cardioïde
    $$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

18. Dar una representación parametrica normal :

- de la "tractora"

$$\begin{cases} x = a(\cos t + \ln \tan(t/2)) \\ y = a \sin t \end{cases}$$

- del circulo de radio R centrado al origen.
- de la involuta del circulo:

$$\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t) \\ y = R(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

- de la espiral logaritmica:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

19. Probar que la curvatura de un circulo de radio R es $1/R$ en cualquier punto.

20. Hallar la curvatura de la parabola $y = 2px^2$ en su vertice.

21. Hallar la curvatura de la elipsa:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

en sus vertices.

22. Hallar la curvatura de la espiral logaritmica en un punto cualquiera

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

23. Hallar la curvatura de una curva dada por su ecuación cartesiana $y = f(x)$

24. Hallar la curvatura de una curva dada por su ecuación polar: $r = f(\theta)$.

25. Hallar la curvatura:

- de la estrofoida recta:
$$\begin{cases} x = a\frac{t^2-1}{t^2+1} \\ y = at\frac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$
en el punto $(t = 0)$.
- del "folium" de Descartes:
$$\begin{cases} x = \frac{3a}{2}\frac{(1-t^2)(1+t)}{3t^2+1} \\ y = \frac{3a}{2}\frac{(1-t^2)(1-t)}{3t^2+1} \end{cases}$$
en el origen.

- del mismo "folium" de Descartes en el punto 0.
- del "caracol" de Pascal:

$$\begin{cases} x = k\cos t + a\cos 2t \\ y = k\sin t + a\sin 2t \end{cases}$$

en el punto de intersección con su eje de simetria.

26. Dar una representación parametrica de la evoluta del elipsa:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

27. Hallar la evoluta de la espiral logaritmica:

$$\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$$

28. Hallar la evoluta de la "tractora":

$$\begin{cases} x = a\left(\ln t + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \\ y = \frac{2at}{1+t^2} \end{cases}$$

29. Dar una representacion parametrica normal para los arcos de curvas siguientes

$$\begin{cases} x = t^2/2 \\ y = \cos t + t\sin t \\ z = \sin t - t\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2e^t(\sin t - \cos t) \\ y = 3e^t \\ z = -2e^t(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = 7 - \frac{8}{3}u\sqrt{u} \\ z = -2u^2 \end{cases}$$

30. Para las curvas de representaciones parametricas dadas,expresar en cualquier punto, el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

31. Sea $(\overrightarrow{t}(s), \overrightarrow{n}(s), \overrightarrow{b}(s))$ el triedro de Frenet de una curva. Demostrar que existe un vector $w(s)$ llamado vector de Darboux tal que

$$\overrightarrow{t}' = w \wedge \overrightarrow{t}$$
$$\overrightarrow{n}' = w \wedge \overrightarrow{n}$$
$$\overrightarrow{b}' = w \wedge \overrightarrow{b}$$

32. Sea la curva

$$\begin{cases} x = \begin{cases} t^2 & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \\ y = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases} \\ z = t \end{cases}$$

hallar si posible su triedro de Frenet, su curvatura y su torsion al origen.

33. Representar graficamente las superficies con las siguientes representaciones parametricas y determinar si esas representaciones parametricas son regulares.

$$\begin{array}{lc} a) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u\cos v, u\sin v, v) \\ b) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u\cos u, u\sin u, v) \\ c) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u\cos u, v, u) \\ d) & f : R^* \times R \to R^3 : (u,v) \to (u\cos v, u\sin v, u) \end{array}$$

34. Dar una ecuación implicita para las superficies con siguientes representaciones parametricas:

$$\begin{array}{lc} a) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (\cos u - \sin u, \cos u + \sin u, v) \\ b) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (v(\cos u - \sin u), v(\cos u + \sin u), v) \\ c) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u, v + \sin u, v) \\ d) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (e^u \cos v, e^u \sin v, e^u \sin v) \\ e) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (a\cos^2 u, b\sin^2 v \sin^2 u, c\cos^2 v \sin^2 v) \end{array}$$

35. Determinar si la curva representada por

$$g : R \to R^3 : t \to (t\cos t, t\sin t, t)$$

es trazada sobre

$$\begin{array}{lc} a) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u\cos v, u\sin v, v) \\ b) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u\cos u, u\sin u, v) \\ c) & f : R^2 \to R^3 : (u,v) \to (u\cos u, v, u) \\ d) & f : R^* \times R \to R^3 : (u,v) \to (u\cos v, u\sin v, u) \end{array}$$

36. Probar que

$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = 2\sin\theta/2 \end{cases}$$

representa la intersección de la esfera

$$\left\{\begin{array}{c} x = 2\cos u \cos v \\ y = 2\cos u \sin v \\ z = 2\sin u \end{array}\right.$$

y del cilindro

$$\left\{\begin{array}{c} x = 1 + \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{array}\right.$$

(se llama la "ventana de Viviani).

37. Consideramos el cono

$$\left\{\begin{array}{c} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{array}\right.$$

y trazamos una curva C poniendo

$$\left\{\begin{array}{c} u = f(t) \\ v = t \end{array}\right.$$

determinar la función f de tal manera que las tangentes a C hacen un ángulo con el eje Oz igual a $\arccos(1/\sqrt{6})$.

38. Dar un vector normal y la ecuación del plano tangente a la superficie:

$$\left\{\begin{array}{c} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{array}\right.$$

en el punto de parametro $(1, 1)$.

39. Hallar el plano tangente en un punto cualquiera de

- del cono: $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$
- de la superficie representada por

$$\left\{\begin{array}{c} x = \cos^2 u \cos^2 v \\ y = \cos^2 u \sin^2 v \\ z = \sin^2 u \end{array}\right.$$

40. Hallar la primera forma fundamental de la helicoïde:

$$\left\{\begin{array}{c} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = kv \end{array}\right.$$

- al origen

- en el punto de parametro $(1, 0)$
- en el punto de parametro $(2, \pi/2)$

41. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la esfera:

$$\left\{\begin{array}{r} x = R\cos u \cos v \\ y = R\cos u \sin v \\ z = R\sin u \end{array}\right.$$

42. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la paraboloïde hiperbolica:

$$\left\{\begin{array}{c} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{array}\right.$$

43. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la paraboloïde eliptica:

$$\left\{\begin{array}{c} x = u \\ y = v \\ z = (u/a)^2 - (v/b)^2 \end{array}\right.$$

44. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto de la elipsoïda

$$\left\{\begin{array}{c} x = a\cos u \cos v \\ y = b\cos u \sin v \\ z = c\sin u \end{array}\right.$$

45. Hallar la primera forma fundamental en un cualquier punto del toro:

$$\left\{\begin{array}{c} x = (a + b\cos u)\cos v \\ y = (a + b\cos u)\sin v \\ z = b\sin u \end{array}\right.$$

46. Hallar la longitud del arco

$$\left\{\begin{array}{c} u = e^{kt} \\ v = t \end{array}\right.$$

trazado sobre la superficie

$$\left\{\begin{array}{c} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{array}\right.$$

entre los puntos de coordenadas $(0, 0, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

47. Hallar la longitud del arco

$$\begin{cases} u = \int_{\pi/4}^{t} \frac{dx}{\sin x} \\ v = t \end{cases}$$

trazado sobre la esfera

$$\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \end{cases}$$

de $t = 0$ a $t = \pi$.

48. Sobre la esfera del ejercicio anterior, consideramos la curva:

$$\begin{cases} u = \ln \cot(\frac{\pi}{4} - t/2) \\ v = \frac{\pi}{2} - t \end{cases}$$

y hallar su longitud entre los puntos de parametros $t = 0$ y $t = \pi/2$.

49. Hallar la primera forma fundamental para una representación parametrica de Monge:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

estudiar en particular lo que paso en un punto estacionario de f.

50. Hallar la segunda forma fundamental de los ejercicios anteriores donde teniamos que hallar la primera forma fundamental.

51. Hallar la segunda forma fundamental para una representación parametrica de Monge:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

estudiar en particular lo que paso en un punto estacionario de f.

52. Hallar la curvatura normal del paraboloïde hiperbolico:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

en el origen y en la dirección

- $(du, dv) = (1, 0)$
- $(du, dv) = (0, 1)$
- $(du, dv) = (1, 1)$

53. Hallar la curvatura normal en la superficie:

$$\begin{cases} x = (a + b\cos u)\cos v \\ y = (a + b\cos u)\sin v \\ z = b\sin u \end{cases}$$

en el punto de parametro (u, v) y en la dirección (du, dv).

54. Hallar la curvatura normal de la helice

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

sobre el helicoïde:

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = bv \end{cases}$$

55. Buscar los puntos ombilicales del paraboloïde eliptico $z = (x/a)^2 + (y/b)^2$.

56. Describir la naturaleza de los puntos de la superficie de ecuación: $z = x^2 - y^3$.

57. Hallar la curvatura total de la superficie $z = x^4 - y^4$ en el origen y en el punto $(1, 1, 0)$ y deducir de eso la naturaleza de esos puntos.

58. Hallar la curvatura total en un punto cualquiera del toro.

59. Probar que la curvatura mediana del "catenoïde":

$$\begin{cases} x = \cosh t\cos v \\ y = \cosh t\sin v \\ z = t \end{cases}$$

es nula en todo punto.

60. Hallar la curvatura total de la superficie de revolución:

$$\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = g(u) \end{cases}$$

61. Probar que la pseudo-esfera

$$\begin{cases} x = \frac{2au}{1+u^2}\cos v \\ y = \frac{2au}{1+u^2}\sin v \\ z = a(\ln u + \frac{1-u^2}{1+u^2}) \end{cases}$$

tiene una curvatura total constante y negativa.

62. Hallar la curvatura, la curvatura normal, la curvatura geodesica,
    - de un paralelo de una superficie de revolución
    - de un meridiano de una superficie de revolución.

63. Determinar si (U, g) dados son un mapa locale (otramente dicho si $g : U \to R^{2\times 2}$ representan un arco riemaniano) y determinar su clase
    - $$g : R^2 \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} 1 & x^1 \\ -x^1 & 2 \end{pmatrix}$$
    - $$g : R \times R^* \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} \sin(x^1/x^2) & \cos(x^1/x^2) \\ \cos(x^1/x^2) & \sin(x^1/x^2) \end{pmatrix}$$
    - $$g : R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} 1/\left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
    - $$g : R^2 \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4\right]^{-2} & 0 \\ 0 & \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + 4\right]^{-2} \end{pmatrix}$$
    - $$g : R^2 \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} \left|x^1\right| & \frac{1}{2}x^1 \\ \frac{1}{2}x^1 & \left|x^1\right| \end{pmatrix}$$
    - $$g : R^2 \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} x^1\left|x^1\right| & \frac{\sqrt{2}}{2}\left|x^1 x^2\right| \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left|x^1 x^2\right| & x^2\left|x^2\right| \end{pmatrix}$$
    - $$g : R_+^{*2} \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} 4x^1\left|x^1\right| & 0 \\ 0 & 4x^2\left|x^2\right| \end{pmatrix}$$

64. Determinar $\widetilde{g}$ tal que $\varphi : \widetilde{U} \to U$ sea el cambio de parametros entre (U, g) y $(\widetilde{U}, \widetilde{g})$.
$$U : R^2 \setminus (R_+ \times \{0\}) = \left\{(x^1, x^2) | x^1 < 0 \ o \ x^2 \neq 0\right\}$$
$$g : U \to R^{2\times 2} : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} 1 + 4(x^1)^2 & 4x^1x^2 \\ 4x^1x^2 & 1 + 4(x^2)^2 \end{pmatrix}$$
$$\widetilde{U} = R_+^* \times]0, 2\pi[$$
$$\varphi : \widetilde{U} \to U : (\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2) \to (x^1, x^2) = (\widetilde{x}^1 \cos \widetilde{x}^2, \widetilde{x}^1 \sin \widetilde{x}^2)$$
Determinar las clases de los dos mapeos y del cambio de variables.

65. Construir un mapa local (tensor métrico) representando :

- el plano "invertido"

$$\left\{\begin{array}{c} x = u/(u^2+v^2) \\ y = v/(u^2+v^2) \\ z = 0 \end{array}\right.$$

- la semi-esfera en representación de Monge:$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$
- la esfera "estereografica":

$$\left\{\begin{array}{c} x = 4u/(u^2+v^2+4) \\ y = 4v/(u^2+v^2+4) \\ z = (u^2+v^2-4)/(u^2+v^2+4) \end{array}\right.$$

66. Hallar los simbolos de Christoffel de primera y segunda especie para las representaciones parametricas de
    - la esfera
    - el paraboloïde hiperbolico
    - el paraboloïde eliptico
    - el elipsoïde
    - el toro

67. Hallar los simbolos de Christoffel de primera especie y de segunda especie para una representación parametrica de Monge. Estudiar en particular lo que pasa en un punto estacionario de f.

68. Hallar el tensor de Riemann de segundo especie para las mapas locales

$$g : R^2 \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} \left[(x^1)^2+(x^2)^2+4\right]^{-2} & 0 \\ 0 & \left[(x^1)^2+(x^2)^2+4\right]^{-2} \end{pmatrix}$$

69. Hallar el tensor de Riemann de segundo especie para las mapas locales

$$g : R^2 \backslash \{(0,0)\} \to R^2 : (x^1, x^2) \to \begin{pmatrix} \left[(x^1)^2+(x^2)^2\right]^{-2} & 0 \\ 0 & \left[(x^1)^2+(x^2)^2\right]^{-2} \end{pmatrix}$$

70. Probar que

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = \frac{1}{2} & \left[\partial_j \partial_k g_{il} + \partial_i \partial_l g_{jl} - \partial_i \partial_k g_{jl} - \partial_j \partial_l g_{ki}\right] \\ & + \sum_{a,b} g^{ab} \left[\Gamma_{ila} \Gamma_{jkb} - \Gamma_{ika} \Gamma_{jlb}\right] \end{aligned}$$

71. Probar las siguientes relación

- $R_{ijkl} = R_{klij}$
- $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$
- $R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0$

72. Sobre el cilindro
$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$
consideramos la elipse A representada por
$$\begin{cases} u = t \\ v = \sin t \end{cases}$$
Hallar la derivada covariante al largo de A de los campos de vectores tangentes siguientes
    - $(0, 0, 1)$
    - $(-\sin u, \cos u, 0)$
73. Sobre la esfera unidad representada por
$$f(u, v) \to \begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \sin u \end{cases}$$
Consideramos el campo de vectores tangentes $T = \partial_1 f$. Hallar
    - su primera derivada covariante parcial al largo de las curvas $v = cste$.
    - su segunda derivada covariante parcial a largo de las curvas $u = cste$.
74. Hallar la curvatura geodesica de un paralelo y de un meridiano de una superficie de revolución.
75. Hallar κ_g para una helice circular vista como trazada sobre un cilindro
76. Hallar κ_g para una helice circular vista como trazada sobre un helicoïde.
77. Demostrar que las geodesicas de un cilindro (generalizado) son las helices generalizadas trazadas sobre este cilindro.
78. Escribir las ecuaciones diferenciales de las geodesicas para una representación de Monge.
79. Hallar las geodesicas de un cono de revolución.
80. Sea $f(u, v)$ una representación de clase al menos igual a dos de un arco de superficie tal que $E = E(u), F = 0, G = G(u)$
    - Probar que las curvas $v = cste$ son geodesicas.
    - Determinar cual condición tiene que llenar una curva $u = cste$ para ser una geodesica.

Capitulo 6

Bibliografia

En este capitulo, vamos a dar una lista de referencias que podria ser util para aprofundir o ir mas alla de esas notas o para dar nueva luz sobre los conceptos estudiados en esas notas. Esta lista es lejo de ser exhaustiva y va ser completada y actualizada durante el curso mismo.

1. Theodore Frankel, "The geometry of physcis", Cambridge University press (2004)
   Excelente libro que va mas alla de esas notas.Un libro de referencia!

2. Abraham Goetz,"Introduction to differencial geometría",Addison Wesley (1970)
   Excelente libro que va de las nociones sencillas como curvas planas y curvas espaciales hasta geometría riemaniana y las tecnicas modernas de la geometría diferencial.

3. Alfred Gray,"Modern Differential geometry of curves and surfaces", CRC Press (1993)
   Un libro que va mas alla de esas notas en su presentación de la geometría diferencial. Tiene muchos programas Mathematica para ilustrar su contenido.

4. Martin M.Lipschutz,"Theory and problems of differential geometry",McGraw-Hill, N-Y (1969)
   Un bueno libro con problemas resueltas en detalles y contiene un rica colección de propiedades de curvas y superficie.

5. E.H. Lockwood,"A book of curves", Cambridge University press (1961)
   Un pequeño catalogo de curvas planas.

6. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ ˜history/Curves/Curves.html
   interesante sitio internet que presenta varios ejemplos de curvas planas.

7. M.P. do Carmo, "geometría diferencial de curvas y superficies", Alianza Universidad Textos 1990
Un excelent libro que tiene ademas la ventaja de ser en español.

8. Chris J.Isham, "Modern differential geometry for physicists", World Scientific, 1999
Un bueno libro que claramente va mucho mas alla del nivel de esas notas.