Métodos Matemáticos III

Dr. David Delépine [1]

Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque, N 103
Col. Lomas del Campestre
CP-37150 Léon, Gto

Agosto 22, 2004

[1]email: delepine@fisica.ugto.mx; tel: ext. 8424

Contenido

Capitulo 1

Introducción

Desde la época de Newton, la búsqueda de modelos matemáticos para describir los fenomenos naturales fué siempre una fuente de nuevos problemas en matemáticas. Y podríamos decir que la mayoría de los progresos en matemáticas fueron el resultado de análisis de problemas físicos. Así, fué por ejemplo, el desarrollo del análisis en funciones armónicas que proviene del trabajo de Fourier sobre la ecuación de calor. Pero seria muy injusto reducir la influencia de las matemáticas a este papel. De hecho, el estudio de las propiedades matemáticas de los modelos necesarios para explicar fenómenos físicos pueden dar una nueva luz sobre esos mismos fenómenos asi como ayudarnos a elaborar nuevas preguntas y a progresar en nuestra comprensión del mundo físico. Uno de los mejores ejemplos de esta doble interacción es la influencia de la teoría de grupos sobre los modelos de partículas subatómicas.

Así este curso es el seguimiento lógica del curso de métodos matemáticos II. El hilo conductor de este curso es la noción de espacio de Hilbert y su aplicación a la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales. Se sugiere a los estudiantes que no tomaron el curso de métodos matemáticos II al menos lean el capítulo 9 de las notas de cursos de métodos matemáticos II donde se introducen las nociones de base sobre los espacios de Hilbert.

Escogimos tomar la noción de espacio de Hilbert como hilo conductor de los cursos de métodos matemáticos (II y III) por dos motivos:

(1) desde el punto de vista de la física, el espacio de Hilbert es el marco matemático de todas las teorías cuánticas. Todas las observables en mecánica cuántica son representadas por operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert adecuado.

(2) desde el punto de vista de las matemáticas, esos estudios son una introducción al análisis funcional y abren la puerta a varios problemas muy importantes tales como los problemas espectrales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales,etc.

Por eso, el curso va a dividirse en tres partes importantes:

(i) El estudio de las funciones especiales vistas como bases ortonormales del espacio de Hilbert definido sobre la esfera (dimensión 3), ó sobre el disco unidad (dimensión 2) que van a permitirnos introducir, respectivamente, las armónicas esféricás y las funciones cilíndricas en general (funciones de Bessel). Esta parte es la continuación logica del fin del curso de métodos matemáticos II, donde estudiamos los polinomios ortogonales como bases ortonormales de espacios de Hilbert adecuados (polinomios de Legendre, Hermite, Laguerre,...)

(ii) La resolución de ecuaciones diferenciales por el método de substitución en series (método de Frobenius). Eso va a permitirnos distinguir entre singularidades esenciales o no-esenciales de una ecuación diferencial.

(iii) El estudio de los operadores definidos sobre espacios de Hilbert. En particular, vamos a definir las nociones basicas del análisis de esos operadores (introducción de la noción de espacio dual, de operadores acotados, adjuntos, autoadjuntos, simétricos, unitarios, isometrías, Sturm-Liouville...). El objetivo es llegar al teorema espectral y aplicarlo a la resolución de problemas de valores propios tan comunes en física. Su aplicación en mecánica cuántica es evidente.

En este curso, como en el anterior, la prioridad no van a ser las demostraciones exactas y detalladas de los teoremas y propiedades de sus aplicaciones. El objetivo de este curso es aprender a usar y aplicar los conceptos estudiados. Es un curso de física matemática antes más que un curso de matemáticas. En este sentido, atraemos la atención de los lectores y estudiantes sobre la importancia de los ejercicios. En el último capítulo de esas notas ustedes pueden encontrar una lista de 50 ejercicios modelo. Esta lista no es exhaustiva y es solamente indicativa de como aplicar los conceptos vistos y estudiados durante el curso teórico. Quiere también atraer la atención de los lectores sobre el hecho de que este curso es solamente un primer paso en el mundo del análisis funcional, y que no podemos estudiar todos los temas interesantes de este campo del análisis matemático.

Así, como tenía que hacer una elección de temas o de ejemplos, trate de hacer esta elección en función de lo que los estudiantes de 6o semestre necesitan, y en función de sus conocimientos adquiridos en los cursos de los semestres anteriores (álgebra lineal, cálculo,...). Recomiendo muy fuertamente a los estudiantes y lectores de esas notas de no detenerse al final de este curso sino continuar adelante y usar esas notas para entrar en las aplicaciones en física de este campo. Por eso, al final de esas notas, ustedes pueden encontrar una lista bibliográfica que tiene dos objetivos: primero, ayudar al estudio de estas notas dando una luz diferente de los varios temas estudiados, y segundo, permitir a ustedes ir más allá de lo expuesto en estas notas.

Antes de acabar esta introducción, quiero agradecer, de manera especial, los profesores Jean-Pierre Antoine, Jean Pestieau y Jacques Weyers del Instituto de Física Teórica de la Universidad de Lovania (Bélgica) por su apoyo durante todos mis estudios de licenciadura y de doctorado. Esas notas de cursos se inspiraron de sus curso de física teórica (PHYS1190 y PHYS2121).

Quiero agradecer a Claudia Rodrquez Manrique por su ayuda a corrigir mis errores ortograficas y gramaticas. También quiero agradecer, de manera especial, al Dr. Mauro Napsuciale Mendivil y al Dr. Luis Arturo Ureña López para haber acceptado de revisar estas notas y de ayudarme a mejorarlas.

Capitulo 2

Funciones cuadrado integrables sobre la esféra: armónicos esféricos

2.1 Polinomios de Legendre asociados

El interés en los polinomios de Legendre nace de su relación estrecha con las funciones propias del Laplaciano en R^3 expresado en coordenadas esféricas. En las dos próximas secciones vamos a construir explícitamente la solución de la parte angular de la ecuación de Laplace. La relación entre esas funciones, las esféricas armónicas, y la teoría de las representaciones del grupo de las rotaciones será tratado en algún curso posterior.

Para llegar a este fin, vamos a empezar con la siguiente ecuación lineal que generaliza la ecuación de Helmholtz:

$$[\Delta + F(r)]\, u + k^2 u = 0 \tag{2.1}$$

donde $F(r)$ es una función puramente radial y k^2 es un parámetro a determinar. Aqui,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} D_{\theta,\phi} \tag{2.2}$$

$$D_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{2.3}$$

Procediendo como siempre (ver el curso de métodos matemáticos II), vamos a separar las variables en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ): sea $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$. Obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$R^{''} + \frac{2}{r}R^{'} + (k^2 + F(r) - \frac{c}{r^2})R = 0 \tag{2.4}$$
$$D_{\theta,\phi}Y + cY = 0 \tag{2.5}$$

donde c es la constante de separación.

Para $F = 0$, la ecuación (2.4) no es más que la ecuación de Bessel. Para resolver la parte angular (ec.(2.5)), vamos primero a encontrar las soluciones con simetría axial $\tilde{Y}(\theta)$, es decir, independientes de ϕ. Por eso, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$x = \cos\theta \tag{2.6}$$
$$dx = -\sin\theta d\theta \tag{2.7}$$
$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} \tag{2.8}$$

Obtenemos la siguiente ecuación para $P(x) = \tilde{Y}(\theta)$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right) + cP(x) = 0 \tag{2.9}$$

Podemos reconocer en la ecuación (2.9) a la ecuación de Legendre. Sabemos que las únicas soluciones de cuadrado integrables sobre $x = \cos\theta \in [-1, 1]$ y regulares en $x = \pm 1$ son obtenidas para $c = l(l+1)$ con $l = 0, 1, 2, ...$ y esas soluciones son los polinomios de Legendre $P_l(x)$ (ver curso métodos matemáticos II, capítulo 10).

Vamos a buscar ahora la solución general de la ecuación (2.5) usando de nuevo el método de separación de variables: $Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Después de multiplicar por $\sin^2\theta$, la ecuación (2.5) se transforma en

$$\Phi\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\Theta^{'}\right)\right) + \Theta\Phi^{''} + l(l+1)\sin^2\theta\Theta\Phi = 0 \tag{2.10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\Theta^{'}) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0 \tag{2.11}$$
$$\Phi^{''} + m^2\Phi = 0 \tag{2.12}$$

De nuevo, podemos reescribir la ecuación (2.11) haciendo la substitución $x = \cos\theta$, lo que da ***la ecuación de Legendre asociada***:

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy^{'} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0 \tag{2.13}$$

Se puede verificar fácilmente que para $l, m \geq 0$, la función siguiente,llamada polinomios asociados de Legendre, es una solución de (2.13).

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x) \tag{2.14}$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m}(x^2-1)^l \tag{2.15}$$

donde $P_l(x)$ es el polinomio de Legendre de orden l y $P_l^0 = P_l$.

A notar los dos propiedades siguientes:

- $P_l^m(x) \neq 0$ para $m \leq l$.
- la ecuación (2.13) depende solamente de m^2. Entonces, $P_l^{-m}(x)$ tiene que ser un multiplo de P_l^m. Usando la misma convención que en N.Ja.Vilenkine, tomamos como definición

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \quad (m \geq 0) \tag{2.16}$$

En conclusión, obtenemos una familia de funciones $\{P_l^m(x)\}$ con dos indices enteros $l = 0, 1, 2, ...$ y $m = -l, ..., +l$. Entonces, hay $(2l+1)$ funciones $P_m^l(x)$ para l fijo. La ecuación de Legendre asociada admite soluciones de cuadrado integrable sobre $[-1, 1]$ y regulares en $x = \pm 1$ para esos valores de l y m.

Para $m \geq 0$, podemos escribir , con $x = \cos\theta$,

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{\sin^m\theta}{2^l l!} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{l+m} \sin^{l+m}\theta \tag{2.17}$$

Como los polinomios de Legendre ordinarios, los polinomios asociados verifican una relación de ortogonalidad

$$< P_l^m | P_{l'}^m > \equiv \int_{-1}^{1} P - l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \delta_{l,l'} \tag{2.18}$$

Debe notarse que tenemos que tomar el mismo valor de m para los dos polinomios.

Para simplificar las notaciones, vamos a introducir las siguientes variables:

$$X = (1 - x^2) \tag{2.19}$$

$$D = \frac{d}{dx} \tag{2.20}$$

$$Y_{l+m} = (1-x^2)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (1-x^2)^l = X^m D^{l+m} X^l \tag{2.21}$$

donde Y_{l+m} es un polinomio de grado $(l+m)$.

Para verificar esta relación de ortogonalidad, vamos a suponer que $l^{'} \geq l$ y procedemos por integración por partes

$$\begin{aligned} < P_l^m | P_{l'}^m > &\approx \int_{-1}^{1} X^m D^{l+m} X^l \; D^{l^{'}+m} X^{l^{'}} dx \qquad (2.22) \\ &= \int_{-1}^{1} Y_{l+m} D^{l^{'}+m} X^l \\ &= Y_{l+m} D^{l^{'}+m-1} X^{l^{'}} |_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} D Y_{l+m} D^{l^{'}+m-1} X^{l^{'}} dx \end{aligned}$$

Lo hacemos m veces y obtenemos

$$... = (D^{m-1}Y_{l+m}D^{`}l^{'}X^{l^{'}})|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} D^m Y_{m+l} D^{l^{'}} X^{l^{'}} dx \qquad (2.23)$$

Cada vez, el término integrado se cancela en $x = \pm 1$ por debido al primero factor:$D^k Y_{l+m} = 0$ para $x = \pm 1$ y $0 \leq k \leq m-1$.

Haciendo todavía l integraciones por partes, de nuevo el término integrado se anula esta vez debido al segundo factor.

$$... = D^{l+m-1}Y_{l+m}D^{l^{'}-l}X^{l^{'}}|_{-1}^{1} + (-1)^{l+m}\int_{-1}^{1} D^{l+m}Y_{l+m}D^{l^{'}-l}X^{l^{'}} dx$$

Pero Y_{l+m} es un polinomio de grado $l+m$: el primer factor del integrando es entonces un número y obtenemos

$$< P_{l'}^m | P_l^m > \quad \approx \quad \int_{-1}^{1} D^{l^{'}-l}X^{l^{'}} dx \qquad (2.24)$$

- si $l^{'} = l$, $< P_l^m | P_l^m > \approx \int_{-1}^{1} X^l \neq 0$

- si $l^{'} \neq l$, $< P_{l'}^m | P_l^m > \approx D^{l^{'}-l-1}X^{l^{'}}|_{-1}^{1} = 0$

Poniendo todas las constantes de proporcionalidad, encontramos el resultado siguiente:

$$< P_{l'}^m | P_l^m >= \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \qquad (2.25)$$

Claro que podemos obtener para los P_l^m una función generadora y relaciones de recurrencia como para los P_l pero esos resultados son de poco interés.

2.2 Los armónicos esféricos

Con la ayuda de los polinomios de Legendre asociados $P_l^m(\cos\theta)$ y de las exponenciales $e^{im\phi}$, podemos construír un sistema ortonormal de funciones sobre la esfera S^2.

Definición:

$$Y_l^m(\theta,\phi) = N_{lm}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \quad l = 0, 1, 2, ... \text{ y } m = -l, ..., l \qquad (2.26)$$

con

$$N_{lm} = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{1/2} \qquad (2.27)$$

Las funciones $Y_m^l(\theta,\phi)$ son llamadas ***esféricos armónicos.***

Entonces, tenemos

$$\int_{S^2} d\omega \overline{Y_l^m(\theta,\phi)} Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{2.28}$$

donde $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi =$ elemento de superficie sobre S^2.

Como las funciones trigonométricas $\left\{\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \nu \in Z\right\}$ forman una base ortonormal sobre $L^2(S^1, d\phi)$, tenemos también el siguiente teorema:

Teorema:

Los esféricos armónicos $\{Y_l^m(\theta,\phi), l = 0, 1, 2, ..$ ***y*** $m = -l, ..., l\}$ ***forman una base ortonormal sobre*** $L^2(S^2, d\omega)$***.***

Este teorema nos da el análisis de Fourier sobre la esfera S^2 y se demuestra combinando el resultado para las funciones trigonométricas y para los polinomios de Legendre.

Entonces, podemos desarrollar en esta base cualquier función f cuadrado integrable sobre S^2:

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\phi) \tag{2.29}$$

con

$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \overline{Y_l^m(\theta,\phi)} \; f(\theta,\phi) =< Y_l^m|f > \tag{2.30}$$

Esta situación se traduce también en términos del subespacio hilbertiano:

$$L^2(S^2, d\omega) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l \tag{2.31}$$

con $\mathcal{H}_l$ es el sub-espacio de Hilbert generado por el conjunto de funciones $\{Y_l^m, -l \leq m \leq l\}$, la dimensión de $\mathcal{H}_l = 2l+1$. Esta decomposición es fundamental para el estudio de las representaciones unitarias e irreductibles del grupo de las rotaciones $SO(3)$.

Este resultado va a permitirnos escribir la solución cuadrado integrable más general de la ecuación de Helmholtz generalizada. Tenemos que $L^2(R^3) \sim L^2(R^+) \otimes L^2(S^2)$. Esta relación significa que todo elemento de $g \in L^2(R^3)$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$g(r,\theta,\phi) = \sum_s \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{slm} f_s(r) Y_l^m(\theta,\phi) \tag{2.32}$$

donde $\{f_s(r)\}$ es una base ortonormal de $L^2(R^+)$.

Para un potencial dado $F(r)$ en la ecuación (2.1), la ecuación radial nos da la base de funciones $\{f_s(r)\}$. Como la constante de separación $c = l(l+1)$ depende de l, los índices s y l no son independiente y en general tenemos $s \equiv s(l)$. Vimos un ejemplo explícito de esta situación en la resolución de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno (ver polinomios de Laguerre en métodos mat. II).

Explicitamente, algunos esféricos armónicos son:

$l = 0$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{2.33}$$

$l = 1$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x+iy}{r} \tag{2.34}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \tag{2.35}$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x-iy}{r} \tag{2.36}$$

$l = 2$

$$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{i2\phi} \tag{2.37}$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi} \tag{2.38}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \tag{2.39}$$

$$Y_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{-i\phi} \tag{2.40}$$

$$Y_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{-i2\phi} \tag{2.41}$$

$$\tag{2.42}$$

En el caso $l = 1$, podemos considerar las siguientes funciones:

$$Y_1^x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1^{-1} - Y_1^1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{x}{r} \tag{2.43}$$

$$Y_1^y = \frac{i}{\sqrt{2}}(Y_1^{-1} + Y_1^1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{y}{r} \tag{2.44}$$

$$Y - 1^z = Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \tag{2.45}$$

Así las 3 funciones (Y_1^x, Y_1^y, Y_1^z) se transformo, cuando aplicamos una rotación, como las 3 componentes de un vector. Una observación análoga puede ser hecha para Y_l^m (tensor de orden 2, simétrico y sin traza). Esto es una prueba suplementaria de la relación estrecha entre los esféricos armónicos y las representaciones del grupo de rotaciones $SO(3)$.

Capitulo 3

Funciones cuadrado integrables sobre el disco unidad: funciones de Bessel

3.1 Generalidades

Las funciones de Bessel aparecen en todos los problemas con simetría axial o esférica. Y por lo mismo, las funciones de Bessel son las funciones no elementales más estudiadas. Podemos encontrar una bibliografía numerosa sobre este tema pero quiero atraer su atención sobre el hecho que las convenciones pueden cambiar de un autor a otro.

Como las otras funciones especiales estudiadas anterioramente, podemos definir las funciones de Bessel a partir de diferentes propiedades: función generadora, relación de recurrencia, ecuación diferencial, relación de ortogonalidad, representación de un grupo.

Vamos a estudiar esas diferentes propiedades en las próximas secciones y por empezar vamos a estudiar la función generadora de las funciones de Bessel. Al igual que para las otras funciones especiales, todas esas propiedades provienen del hecho que las funciones de Bessel son las funciones propias de un operador autoadjunto (en este caso, de la parte radial del laplaciano).

3.2 Función generadora

Vamos a definir la función de Bessel $J_n(z)$ a partir de la siguiente función generadora (analítica para $0 < |\tau| < \infty$):

$$f(z,\tau) \equiv e^{\frac{z}{2}\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)\tau^n \tag{3.1}$$

con $z, \tau \in C$. $J_n(z)$ es el coeficiente de τ^n en la serie de Laurent de $f(z,\tau)$ alrededor de $\tau = 0$. Entonces, tenemos

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right)}}{\tau^{n+1}} d\tau \tag{3.2}$$

donde $\mathcal{C}$ es un cículo de radio cualquier alrededor de $\tau = 0$. Haciendo la substitución $\tau = 2t/z$, obtenemos

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^n \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^t e^{-z^2/4t}}{t^{n+1}} dt \tag{3.3}$$

Usando la serie de Taylor de los dos exponenciales:

$$e^t = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \tag{3.4}$$

$$e^{-z^2/4t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \frac{(-1)^n}{\nu!} \left(\frac{1}{t}\right)^{\nu} \tag{3.5}$$

obtenemos

$$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu! p!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu} \frac{1}{2\pi i} \oint t^{p-(n+\nu+1)} \; dt \tag{3.6}$$

Si recordamos que $\oint t^k dt = 0$ para $k \neq -1$ y $\oint t^{-1} dt = 2\pi i$, podemos ver directamente que la integral de la ecuación anterior vale $(2\pi i)\delta_{p,n+\nu}$, lo que implica $n + \nu \equiv \mu \geq 0$ y entonces

$$J_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(n+\nu)!\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu} \tag{3.7}$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(n+\nu)!\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \tag{3.8}$$

El factorial $(n+\nu)!$ es definido solamente para $(n+\nu) \geq 0$. Si $n \geq 0$, esta condición es siempre satisfhecha. Si $n < 0$, los términos correspondiente a $(n+\nu) < 0$, es decir $\nu = 1, 2, ... - n - 1$ no contribuyen, por que no pueden verificar la condición $n + \nu \equiv \mu \geq 0$ y entonces la integral $\oint t^{\mu-(n+\nu+1)} dt$ es nula (el integrando no tiene polo en $t = 0$). Para tomar en cuenta las valores de $n < 0$, vamos a regresar la expresión de $J_n(z)$ antes de usar la serie de Taylor de las funciones exponenciales:

$$J_n(z) = \sum_{n+\nu \geq 0} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^t}{t^{n+\nu+1}} dt \tag{3.9}$$

Usando la serie de Taylor del exponencial e^t, obtenemos en el caso de $-n < 0$,

$$J_{-n}(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(-n+\nu)!\nu!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2\nu} \tag{3.10}$$

Esta expresión puede reescribirse introduciendo el indíce $\mu = \nu - n$ como

$$J_{-n}(z) = (-1)^n \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!(n+\mu)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\mu} \tag{3.11}$$

Comparando esta ecuación con la definición anterior de $J_n(z)$ en serie, obtenemos la importante relación

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), n \text{ entero} \tag{3.12}$$

Es muy importante notar que esta relación es VALIDA SOLAMENTE PARA n ENTERO.

3.3 Fórmula de recurrencia y ecuación diferencial

Como en el caso de los polinomios de Legendre, obtenemos las fórmulas de recurrencia derivando, término a término, la función generadora.

(a) derivando en la variable τ, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(z,\tau) = \frac{z}{2}(1 + \frac{1}{\tau^2})e^{\frac{z}{2}(\tau - 1/\tau)} \tag{3.13}$$

$$= \frac{z}{2}(1 + \frac{1}{\tau^2}) f(z,\tau) \tag{3.14}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) n \tau^{n-1} \tag{3.15}$$

lo que da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(z)\tau^{n-1} = \frac{z}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\tau^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\tau^{n-2} \right) \tag{3.16}$$

$$\Rightarrow n J_n(z) = \frac{z}{2}\left(J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z)\right) \tag{3.17}$$

(b) derivando en la variable z, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(z,\tau) = \frac{1}{2}(\tau - \frac{1}{\tau})e^{\frac{z}{2}(\tau - 1/\tau)} \tag{3.18}$$

$$= \frac{1}{2}(\tau - \frac{1}{\tau}) f(z,\tau) \tag{3.19}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^{'}(z)\ \tau^n \tag{3.20}$$

lo que da la relación de recurrencia siguiente:

$$\Rightarrow J_n^{'}(z) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right) \tag{3.21}$$

A partir de esas dos relaciones de recurrencia, podemos obtener la ecuación diferencial que satisfacen las funciones de Bessel J_n. Por adición y substracción de las ecuaciones (3.17) y (3.21), obtenemos

$$J_n^{'} + \frac{n}{z} J_n - J_{n-1} = 0 \tag{3.22}$$

$$J_n^{'} - \frac{n}{z} J_n + J_{n+1} = 0 \tag{3.23}$$

Derivando la ecuación (3.23), tenemos

$$J_n^{''} + \frac{n}{z^2} J_n - \frac{n}{z} J_n^{'} + J_{n+1}^{'} = 0 \tag{3.24}$$

Usando las ecuaciones (3.22) y (3.23), tenemos

$$J_{n+1}^{'} = J_n - \frac{n+1}{z} J_{n+1} \tag{3.25}$$

$$= J_n - \frac{(n+1)}{z} \left(\frac{n}{z} J_n - J_n^{'} \right) \tag{3.26}$$

Substituyendo eso en la ecuación (3.24), obtenemos

$$J_n^{''} + \frac{1}{z} J_n^{'} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) J_n = 0 \tag{3.27}$$

Esta es ***la ecuación de Bessel***.

Notemos que la ecuación de Bessel es una ecuación para z complejo. También, podemos ver que la ecuación de Bessel tiene sentido por cualquier valor de n.

La ecuación de Bessel (3.27) es para $n \in C$, lineal y de segundo grado y entonces admite para cada $n \in C$, dos soluciones linealmente independientes. Así tenemos que distinguir entre los dos siguientes casos:

- n entero, la relación (3.12) implica que encontramos solamente una solución de la ecuación de Bessel, $J_n(z)$. En las próximas secciones, vamos a construir la segunda solución independiente de J_n.
- n no entero, la relación (3.12) no es válida y en hecho, como vamos a verificarlo en las próximas secciones, $J_n(z)$ y $J_{-n}(z)$ son linealmente independientes.

Antes de estudiar las funciones de Bessel con índice n no-entero, vamos a reexpresar las relaciones de recurrencia de una manera que nos sera útil para discutir los ceros de las funciones de Bessel. Las relaciones (3.22) y (3.23) pueden escribirse respectivamente de la siguiente manera:

$$J_{n-1} = \frac{n}{z} J_n + J_n^{'} = z^{-n} \frac{d}{dz} \left(z^n J_n \right) \tag{3.28}$$

$$J_{n+1} = \frac{n}{z} J_n - J_n^{'} = -z^n \frac{d}{dz} \left(z^{-n} J_n \right) \tag{3.29}$$

Entonces, tenemos

$$\frac{d}{dz}\left(z^n J_n\right) = z^n J_{n-1} \tag{3.30}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-n} J_n\right) = -z^{-n} J_{n+1} \tag{3.31}$$

lo que puede escribirse como

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)\left(z^n J_n\right) = z^{n-1} J_{n-1} \tag{3.32}$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)\left(z^{-n} J_n\right) = -z^{-(n+1)} J_{n+1} \tag{3.33}$$

Y entonces, por iteración y m positivo,

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \left(z^n J_n\right) = z^{n-m} J_{n-m} \tag{3.34}$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \left(z^{-n} J_n\right) = (-1)^m z^{-(n+m)} J_{n+m} \tag{3.35}$$

3.4 Funciones de Bessel con índice no-entero

La definición de $J_n(z)$ a partir de la función generadora que hicimos en la sección anterior es válida solamente para n entero. En esta sección vamos a generalizar las dos definiciones de las funciones de Bessel, respectivamente, sobre la forma integral (3.3) y sobre la forma de una serie (3.8), al caso $n \in \mathcal{C}$. Eso es posible con la condición de modificarlas sobre dos puntos:

1. cambiar el contorno C de la ecuación (3.3): el círculo centrado en el origen tiene que ser cambiado. La función τ^{-n-1} tiene un polo sencillo en $\tau = 0$ si n es entero, pero tiene un punto de ramificación (algebráico o logarítmico) si n no es entero, lo que nos impide cerrar el contorno. Tenemos que deformarlo cortando el plano τ en el eje de los reales (por ejemplo, eje de los reales negativos).

2. en la ecuación (3.8), la factorial $(n+\nu)!$ tiene que cambiarse por la función $\Gamma(n+\nu+1)$ que vamos a estudiar en el próximo capítulo. Pero vamos a dar por ahora unas propiedades de la función Gamma de Euler $\Gamma(x)$ que van a sernos muy útiles en las próximas secciones:

   - $\Gamma(z)$ es holomórfica en todo el plano z excepto en $z = 0, -1, -2, ...$ donde la función tiene un polo sencillo.
   - $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y $\Gamma(1) = 1$, $\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$ para n entero.
   - $\Gamma(z)$ no tiene ceros.

Con eso, podemos rehacer la misma derivación que en la sección 2 pero esta vez, con $n \in \mathcal{C}$ y usando la siguiente integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D e^t t^\lambda dt = \frac{-\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \tag{3.36}$$

Obtenemos finalmente la serie general correspondiente a la ecuación (3.8):

$$J_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu}, \quad n \in \mathcal{C} \text{ y } n \neq -1, -2, ... \tag{3.37}$$

A partir de esta serie que podemos tomar como definición de $J_n(z)$, podemos demostrar, por derivación término a término, que la función J_n verifica las dos relaciones de recurrencia (3.17) y (3.21). Entonces, estas son también soluciones de la ecuación de Bessel.

Nos queda verificar la independencia lineal de las dos soluciones $J_n(z)$ y $J_{-n}(z)$. Claramente si n es entero, esas dos soluciones no son independientes pero en general que podemos decir si n es no entero. Vamos a tratar de responder a esta pregunta en la próxima sección.

3.5 Independencia líneal de J_n y J_{-n} y ecuación diferencial de Sturm-Liouville

Para responder a esta pregunta, vamos a usar el método de Wronsky (ver curso métodos matemáticos II) que vamos a recordar brevemente.

Consideramos una ecuación diferencial de 2o grado:

$$y^{''} + P(x)y^{'} + Q(x)y = 0 \tag{3.38}$$

Sea $y_{1,2}$ dos soluciones diferentes de (3.38), $y_{1,2}$ son linealmente independientes si $\exists \alpha, \beta \neq 0$ t.q.

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \tag{3.39}$$

$$\Rightarrow \alpha y_1^{'}(x) + \beta y_2^{'}(x) = 0 \tag{3.40}$$

Eso es posible solamente si el determinante de los coeficiente es identicamente nulo:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.41}$$

$W(x)$ es llamado Wronskiano de las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Si $W(x)$ no es idénticamente igual a cero, eso significa que $y_{1,2}(x)$ son dos soluciones linealmente independientes. Es muy fácil verificar que podemos escribir $W(x)$ de la siguiente manera:

$$W(x) = W(a)e^{-\int_a^x P(x)\ dx} \tag{3.42}$$

y entonces,

$$W(a) \neq 0 \Rightarrow W(x) \neq 0 \qquad \forall x \tag{3.43}$$

Un caso particularemente importante es el caso de *una ecuación diferencial formalmente autoadjunta o de Sturm-Liouville.*

Por eso vamos primero a definir lo que llamamos ecuación diferencial autoadjunta o de Sturm-Liouville. Sea L, un operador diferencial tal que

$$Lu(x) = p_0(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + p_1(x)\frac{du(x)}{dx} + p_2(x)u(x) \tag{3.44}$$

En el caso de la Ec. (3.38), tenemos

$$P(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}; Q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \tag{3.45}$$

Las funciones $p_{1,2}(x)$ son funciones reales de x y son continuas sobre el intérvalo de definición del operador L. Además, $p_0(x)$ no tiene cero sobre el intérvalo de definición.

Podemos definir un operador $\overline{L}$, llamado <u>*operador autoadjunto*</u>, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\overline{L}u(x) &= \frac{d^2}{dx^2}(p_0(x)u(x)) - \frac{d}{dx}(p_1(x)u(x)) + p_2(x)u(x) && (3.46)\\
&= p_0(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (2p_0^{'}(x) - p_1(x))\frac{du(x)}{dx} \\
&\quad +(p_0^{''}(x) - p_1^{'}(x) + p_2(x))u(x) && (3.47)
\end{aligned}$$

Comparando las ecs. (3.44) y (3.47), es fácil de ver que la condición necesaria y suficiente para tener $\overline{L} = L$ es

$$p_0^{'}(x) \equiv \frac{dp_0(x)}{dx} = p_1(x) \tag{3.48}$$

Cuando esta condición se satisface, tenemos

$$\overline{L}u = Lu = \frac{d}{dx}\left(p_0(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + p_2(x)u(x) \tag{3.49}$$

y el operador L es llamado *autoadjunto.*

Vamos ahora a considerar una ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
Lu(x) + \lambda w(x)u(x) &= 0 && (3.50)\\
Lu(x) &\equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + q(x)u(x) && (3.51)
\end{aligned}$$

donde L es un operador diferencial de Sturm-Liouville. Sea $u(x)$ y $v(x)$ soluciones de esta ecuación que satisfacen las condiciones de frontera siguientes:

$$v^*pu^{'}\Big|_{x=a} = v^*pu^{'}\Big|_{x=b} \tag{3.52}$$

para cualquier par de solución $u(x)$ y $v(x)$. Consideramos la siguiente integral

$$\int_a^b v^* Lu \quad dx = \int_a^b v^*(pu^{'})^{'} dx + \int_a^b v^* qu dx \tag{3.53}$$

Integrando por parte, tenemos

$$\int_a^b v^*(pu^{'})^{'} dx = v^* pu^{'}\Big|_a^b - \int_a^b v^* pu^{'} dx \tag{3.54}$$

La parte integrada es igual a cero por las condiciones de frontera. Haciendo de nuevo una integración por partes, tenemos

$$-\int_a^b v^* pu^{'} dx = -v^* pu|_a^b + \int_a^b u(pv^{'})^{'} dx \tag{3.55}$$

De nuevo, el término integrado es cero y obtenemos

$$\int_a^b v^* Lu \quad dx = \int_a^b u \quad Lv^* \quad dx \tag{3.56}$$

En términos de espacio de Hilbert y de producto escalar, podemos reescribir esta expresión de la siguiente forma:

$$\int_a^b v^* Lu \quad dx \quad = \quad \langle v|Lu\rangle \tag{3.57}$$

$$\int_a^b u \quad Lv^* \quad dx \quad = \quad \langle Lv|u\rangle \tag{3.58}$$

Y entonces, la ec. (3.56) puede escribirse como

$$\langle v|Lu\rangle = \langle Lv|u\rangle \tag{3.59}$$

Esta propiedad expresa el hecho que el operador L es hermitiano respecto a las funciones $u(x)$ y $v(x)$ que satisfacen las condiciones de frontera especificadas anteriormente. Notemos que esta propiedad de hermiticidad es una consecuencia del caracter autoadjunto de L y de las condiciones de frontera. La propiedad fundamental de los operadores hermitiano (o autoadjunto) es la siguiente:

1. los valores propios de un operador hermitiano son reales

2. las funciones propias de un operador hermitiano son ortogonal

3. las funciones propias de un operador hermitiano forman un conjunto completo.

Vamos a estudiar este tipo de operador y probar esta propiedad en la segunda parte de este curso dentro de la teoría espectral de los operadores en espacio de

Hilbert. Por el momento, regresamos a nuestro problema inicial. En caso de un operador dif. autoadjunto o de Sturm-Liouville, tenemos

$$P(x) = \frac{p_0^{'}(x)}{p_0(x)} = \frac{d}{dx}\ln p_0(x) \tag{3.60}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{W(x)}{W(a)} = -\ln\frac{p_0(x)}{p_0(a)} \tag{3.61}$$

$$\Rightarrow p_0(x)W(x) = p_0(a)W(a) = \text{ constante} \tag{3.62}$$

Es suficiente en este caso evaluar la cuantidad p_0W en un punto cualquier y las dos soluciones $y_{1,2}$ van a ser linealmente independiente si y solamente si el valor de p_0W evaluado en este punto es diferente de cero.

Aplicamos eso a la Ec. de Bessel. Claramente, se puede verificar fácilmente que podemos transformar la Ec. de Bessel y reescribirla sobre la forma de una Ec. diferencial de tipo Sturm-Liouville con $p_0(x) = x$.

Para determinar la independencia de las dos soluciones de Bessel ($J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$), entonces tenemos que hallar

$$xW(J_n, J_{-n})(x) = x(J_n(x)J_{-n}^{'}(x) - J_{-n}(x)J_n^{'}(x)) \tag{3.63}$$

en un punto cualquiera. Claro, vamos a escoger este punto de manera que simplifique al máximo el cálculo. Por eso, vamos a escoger el punto $x = 0$. Usando la definición en serie de las funciones de Bessel, podemos obtener el comportamiento de $J_{\pm n}$ cerca de $x = 0$ y obtenemos

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n\left(1 + O(x^2)\right) \simeq \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)} \tag{3.64}$$

$$J_n^{'}(x) = \frac{n}{2\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(1 + O(x^2)\right) \simeq \frac{nx^{n-1}}{2^n\Gamma(n+1)} \tag{3.65}$$

Entonces,

$$xW(x)|_{x\sim 0} = \frac{-2n}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n+1)} \tag{3.66}$$

$$= \frac{-2}{\Gamma(n+1)\Gamma(n)} \tag{3.67}$$

$$= \frac{-2}{\pi}\sin n\pi \tag{3.68}$$

donde para obtener la última relación, usamos la siguiente propiedad de la función Gamma+

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{3.69}$$

Eso nos da la conclusión esperada: el Wronskiano de J_n y J_{-n} se anula idénticamente si y solamente si n es entero. Tenemos entonces la siguiente situación:

- n entero: J_{-n} es una combinación lineal de J_n y tenemos que construír otra solución linealmente independiente de J_n.
- n no entero: J_n y J_{-n} son linealmente independiente y la solución general de la ecuación de Bessel es entonces

$$Z_n(z) = aJ_n(z) + bJ_{-n}(z) \tag{3.70}$$

3.6 Estudio cualitativo de las funciones de Bessel

Por el caso de una variable real, es fácil de obtener una idea cualitativa del comportamiento de las funciones de Bessel. Vamos a empezar poniendo la ecuación de Bessel en forma normal, es decir, reescribiremos la ec. de Bessel de tal manera que el término en primera derivada sea cero. Por eso vamos escribir la función de Bessel de la siguiente forma:

$$J_n(x) = u_n(x)v_n(x)$$

y vamos a determinar $u_n(x)$ tal que la ecuación en $v_n(x)$ no tiene término en $v_n^{'}$. Por substitución en la ec. de Bessel, encontramos que

$$u_n(x) = x^{-1/2} \tag{3.71}$$

$$J_n(x) = \frac{v_n(x)}{\sqrt{x}} \tag{3.72}$$

$$v_n^{''}(x) + (1 + \frac{(1-4n^2)}{4x^2})v_n = 0 \tag{3.73}$$

Como sabemos también que $J_n(x) \sim x^n$ cerca de cero, tenemos

$$v_n(x) \sim x^{n+1/2} \tag{3.74}$$

para $x \sim 0$.

Examinamos primero el caso $n = 0$. Por eso, tenemos que estudiar la función $v_0(x)$ que satisface las siguientes condiciones:

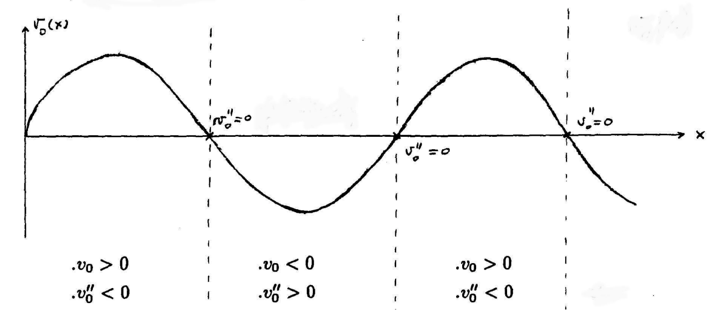
- $v_0^{''}(x) + g(x)v_0(x) = 0$
- $g(x) = 1 + \frac{1}{4x^2} > 0$
- $v_0 \sim x^{1/2}$ para $x \sim 0$

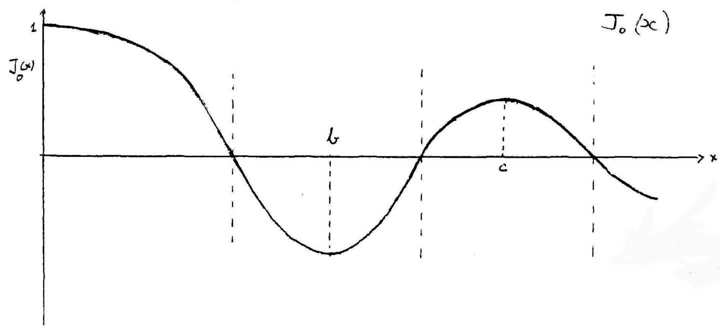
$\Rightarrow v_0^{''}(0) < 0$ y $v_0^{''}(x)$ es negativa siempre que $v_0(x)$ sea positiva.

La función $v_0(x)$ oscila indefinidamente pero no es periódica. Pero como $g(x) \rightarrow 1$ para $x \rightarrow \infty$, la ecuación de v_0 va a tender a

$$v_0^{''}(x) + v_0(x) = 0 \tag{3.75}$$

es decir, a la ecuación de una sinusoidal. Para decirlo de otra manera, la distancia entre dos ceros sucesivos va tender a π por valores decrecientes. Conociendo el comportamiento de $v_0(x)$ podemos deducir el comportamiento de $J_0(x) = x^{-1/2}v_0(x)$:





- $J_0(x)$ tiene una infinidad de ceros y la separación entre dos ceros consecutivos se acerca a π por valores superiores.

- $J_0(x)$ oscilla con una amplitud que disminuye como $x^{-1/2}$ y tiende asinptóticamente a $\frac{C}{\sqrt{x}}\cos(x-\varphi)$.

Vamos a verificar que los extremas sucesivos disminuyen en valores absolutos. Para eso, usamos la Ec. de Bessel,

$$J_0^{''}+\frac{1}{x}J_0^{'}+J_0=0 \tag{3.76}$$

Multiplicando por $2J_0^{'}$,

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}J_0^{'2}+\frac{2}{x}J_0^{'2}+\frac{d}{dx}J_0^2=0 \tag{3.77}$$

Integrando entre dos extremas sucesivos ($b<c$), tenemos

$$J_0^{'2}|_b^c+2\int_b^c\frac{J_0^{'2}}{x}dx+J_0^2|_b^c=0 \tag{3.78}$$

donde el primer término es cero y el segundo término es siempre positivo. Entonces, obtenemos el resultado deseado:

$$J_0^2(c) < J_0^2(b) \tag{3.79}$$

Analizamos ahora el caso general $n > 0$. La única diferencia es que la función $g_n(x)$ puede anularse sobre $[0, \infty[$:

$$g_n(x) = 1 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{n^2 - 1/4} \tag{3.80}$$

Así tenemos que distinguir 3 casos:

(i) $0 < n < 1/2$: $g(x) > 0$ y entonces, la situación es similar al caso $n = 0$.

(ii) $n = 1/2$: $g(x) = 1$, la Ec. para $v_{1/2}$ es entonces una sinusoidal

$$v_{1/2}^{''} + v_{1/2} = 0$$

con la condición que $v_{1/2}(x) \sim x$ para $x \sim 0 \Rightarrow v_{1/2}(x) = \sin x$ y $J_{1/2}(x) = c \sin x / \sqrt{x}$

(iii)$n > 1/2$: $g(x)$ se anula y cambia de signo en $x = \sqrt{n^2 - 1/4}$. Entonces, tenemos que considerar 3 regiones:

- $0 \leq x < \sqrt{n^2 - 1/4}$: $g(x) < 0$, $v^{''}$ y v tiene el mismo signo y como $v(x) \sim x^{n+1/2}$ para $x \sim 0$, v y $v^{''}$ son positivas y $v^{'}$ es creciendo.

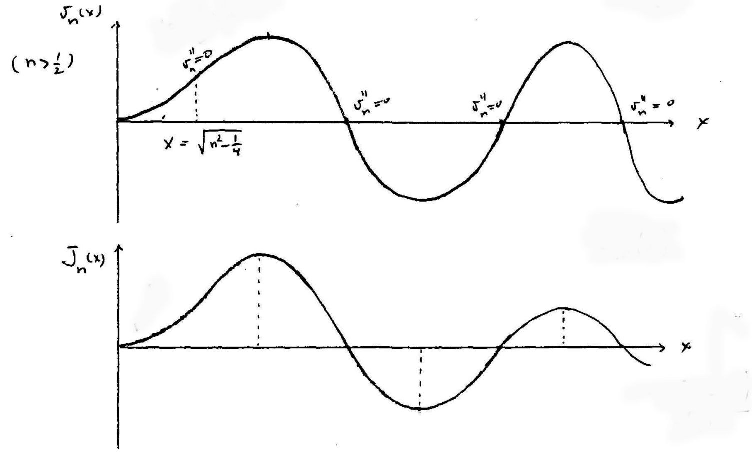
  $x = \sqrt{n^2 - 1/4}$: $g(x) = 0$, $v^{''}$ se anula pero NO $v \Rightarrow$ hay un punto de inflexión quien no es un cero de $v(x)$.

  $x > \sqrt{n^2 - 1/4}$: misma situación que v_0, la función oscila indefinidamente con un período que se acerca a 2π y la función va a tender a una sinusoidal para $x \to \infty$.

Dividendo la función $v(x)$ por $\sqrt{x}$ encontramos inmediatamente el comportamiento de $J_n(x)$:

- $J_n(x) \sim x^n$ para $x \sim 0$
- $J_n(x)$ tiene un punto de inflexión que no es cero y después pasa por un máximo.
- A partir de este punto, $J_n(x)$ oscilla indefinidamente con un periodo que se acerca de 2π y un amplitud decreciente. Asimtóticamente, para $x \to \infty$, $J_n(x) \sim \frac{c}{\sqrt{x}} \cos(x - \varphi)$.

Nos queda comparar J_n y J_m para $n \neq m$:



(i) los ceros de J_n y J_{n-1} son alternados. Eso es una consecuencia de las relaciones de recurrencia obtenida en las secciones anteriores $\Rightarrow$ ceros de J_{n-1} = extremos de $x^n J_n \Rightarrow$ dos ceros sucesivos de J_{n-1} son dos extremos sucesivos de $x^n J_n$ que van a ser un máximo y un mínimo. Por el teorema de Rolle, J_n tiene que tener un cero entre esos dos puntos.

(ii) Sea $\lambda_1^{(n)}$ el primer cero de $J_n(x)$, entonces $\lambda_1^{(n)}$ es una función creciendo de n, es decir que si $\lambda_1^{(n)} > \lambda_1^{(m)}$, tenemos $n > m$.

Podemos generalizar esas propiedades de las funciones de Bessel para $z \in C$. Esta generalización se puede encontrar en la literatura concerniente a las funciones de Bessel (ver capítulo sobre la bibliografía).

3.7 Relaciones de ortogonalidad y aplicaciones

Usando λx como variable y tomando n entero, la ecuación de Bessel puede escribirse como

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(\lambda x) = -\lambda^2 J_n(\lambda x) \tag{3.81}$$

Definiendo,

$$u(x) \equiv J_n(\lambda x), u^{'}(x) = \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \tag{3.82}$$

$$v(x) \equiv J_n(\mu x), v^{'}(x) = \frac{d}{dx} J_n(\mu x) \tag{3.83}$$

Usando la forma de Sturm-Liouville de la Ec. de Bessel, obtenemos

$$(xu^{'})^{'} - \frac{n^2}{x}u = -\lambda^2 xu \tag{3.84}$$

$$(xv^{'})^{'} - \frac{n^2}{x}v = -\mu^2 xv \tag{3.85}$$

Multiplicando la Ec. en u por v y viceversa. Substrayendo las dos ecuaciones así obtenidas, tenemos

$$v(xu^{'})^{'} - u(xv^{'})^{'} = (\mu^2 - \lambda^2)xuv \tag{3.86}$$

Integrando de 0 a 1, obtenemos

$$\begin{aligned}(\mu^2 - \lambda^2)\int_0^1 xu(x)v(x)dx &= \int_0^1 dx\left(v(xu^{'})^{'} - u(xv^{'})^{'}\right) &(3.87)\\ &= x(u^{'}v - v^{'}u)|_0^1 + \int_0^1 dxx(u^{'}v^{'} - u^{'}v^{'})\\ &= u^{'}(1)v(1) - u(1)v^{'}(1) &(3.88)\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$(\mu^2 - \lambda^2)\int_0^1 J_n(\lambda x)J_n(\mu x)xdx = \lambda J_n^{'}(\lambda)J_n(\mu) - \mu J_n(\lambda)J_n^{'}(\mu) \tag{3.89}$$

Tendremos una relación de ortogonalidad si escogemos para μ y λ dos ceros de $J_n(x)$.

$$\int_0^1 J_n(\lambda_i^{(n)}x)J_n(\lambda_j^{(n)}x)xdx = c_j^{-2}\delta_{ij} \tag{3.90}$$

Hay que notar que la derivación que hicimos y su resultado son válidos para cualquier ecuación de Sturm-Liouville.

Nos queda encontrar la constante de normalización c_j. Para encontrar eso, vamos primero a multiplicar la Ec. de Bessel (expresada en u) por $(xu^{'})$ y después integrar de 0 a 1. Procediendo de esta manera, obtenemos

$$\int_0^1 dx\left(xu^{'}(xu^{'})^{'} - n^2uu^{'} + \lambda^2x^2uu^{'}\right) = 0 \tag{3.91}$$

$$\left(\frac{1}{2}(xu^{'})^2 - \frac{1}{2}n^2u^2\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\lambda^2x^2u^2\Big|_0^1 - \lambda^2\int_0^1 xu^2dx = 0 \tag{3.92}$$

El primer término vale cero en $x = 0$. Se puede demostrar usando el comportamiento de las funciones de Bessel cerca de cero que

$$xu^{'} - nu = O(x^2)$$

El segundo término vale cero en los dos extremos. Entonces, nos queda

$$\int_0^1 xu^2dx = \frac{1}{2\lambda^2}\left(u^{'}(1)\right)^2 \tag{3.93}$$

es decir

$$\int_0^1 xJ_n(\lambda_i^{(n)}x)^2dx = \frac{1}{2\lambda_i^{(n)2}}\left(\frac{d}{dx}J_n(\lambda_i^{(n)}x)\right)^2_{x=1} \tag{3.94}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dw}J_n(w)\right)^2_{w=\lambda_i^{(n)}} \tag{3.95}$$

Usando las relaciones de recurrencia, tenemos

$$J_n^{'}(\lambda_i^{(n)}) = J_{n-1}(\lambda_i^{(n)}) = -J_{n+1}(\lambda_i^{(n)}) \tag{3.96}$$

lo que nos da finalmente,

$$\int_0^1 J_n(\lambda_i^{(n)}x)J_n(\lambda_j^{(n)}x)xdx = \frac{1}{2}\left[J_{n+1}(\lambda_i^{(n)})\right]^2\delta_{ij} \tag{3.97}$$

Dicho de otra manera, la sucesión $\left\{c_j\sqrt{x}J_n(\lambda_i^{(n)}x)\right\}_{j=1}^{\infty}$ es ortonormal sobre $L^2([0,1]\,,dx)$ (para $n > -1$). Podemos demostrar que además de ser ortonormal es completa y entonces es una base ortonormal sobre este espacio de Hilbert.

A notar que el factor de peso x en la integral proviene evidentemente del hecho que las funciones de Bessel son funciones propias del Laplaciano a dos dimensiones expresado en coord. polares (y en tal caso, el elemento de volumen es $d\sigma = rdrd\theta$).

Combinando las funciones de Bessel con las funciones $e^{in\theta}$, funciones propias de la parte angular, obtenemos una familia de funciones ortonormal sobre $L^2(D_1, d\sigma)$ donde D_1 es el disco unidad.

$$X_{j,n}(r,\theta) = \frac{c_j}{\sqrt{2\pi}}J_n(\lambda_i^{(n)}r)e^{in\theta}$$

para $n \in N$ y $j = 1, 2, ...$ Entonces, tenemos

$$\int_{D_1}\overline{X}_{j,n}(r,\theta)X_{i,m}(r,\theta)d\sigma = \delta_{ij}\delta_{mn}$$

donde

$$\int_{D_1} = \int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}d\theta$$

Y así tenemos el siguiente teorema:

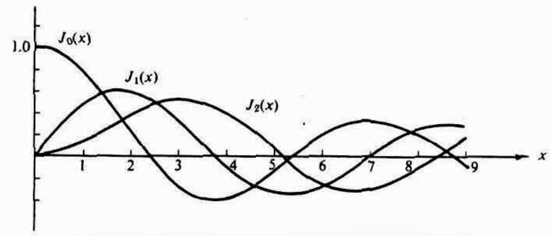
Las funciones $\Big\{X_{j,n}(r,\theta) = \frac{c_j}{\sqrt{2\pi}}J_n(\lambda_i^{(n)}r)e^{in\theta}$,n=0,1,2...,j=1,2,... y donde $\lambda_i^{(n)}$ es el $i$ésimo cero de la función J_n y $c_j^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|J_{n+1}(\lambda_j^{(n)})\right|\Big\}$ forman una base ortonormal sobre $L^2(D_1, rdrd\theta)$.

Ejemplo: difusión de calor sobre una placa circular.
La ecuación a resolver es la siguiente

$$\triangle u = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.98}$$

Zeros of the Bessel Functions and Their First Derivatives

Number of zero	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178
	$J_0'(x)$	$J_1'(x)$	$J_2'(x)$	$J_3'(x)$		
1	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012		
2	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152		
3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459		



con las condiciones de frontera:

$$u(a, \theta, t) = 0 \tag{3.99}$$

y con la condición inicial

$$u(r, \theta, t) = f(r, \theta) \tag{3.100}$$

Separamos las variables: $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ y obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

$$T^{'} + k^2 T = 0 \Rightarrow T = e^{-k^2 t} \tag{3.101}$$

$$\Theta^{''} + \mu^2 \Theta = 0 \Rightarrow \Theta = e^{\pm i\mu\theta} \tag{3.102}$$

$$R^{''} + \frac{1}{r}R^{'} + (k^2 - \frac{\mu^2}{r^2})R = 0 \Rightarrow R = J_\mu(kr) \tag{3.103}$$

donde k y μ son las constantes de separación. Las condiciones de periodicidad en θ significan que $\mu = n \in Z$.

La condición de frontera implica

$$J_n(ka) = 0 \Rightarrow k_j = \frac{\lambda_j^{(n)}}{a} \tag{3.104}$$

para $j = 1, 2, ...$ Entonces, la solución general va a escribirse como

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} e^{-k_j^2 t} e^{in\theta} J_n(\lambda_j^{(n)} \frac{r}{a}) \tag{3.105}$$

Nos queda imponer la condición inicial:

$$f(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} e^{in\theta} J_n(\lambda_j^{(n)}\frac{r}{a}) \tag{3.106}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} \frac{\sqrt{2\pi}}{c_j} X_{jn}(\frac{r}{a},\theta) \tag{3.107}$$

Usando la relación de ortogonalidad, tenemos

$$c_{nj} = \frac{c_j}{a^2\sqrt{2\pi}} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \overline{X}_{jn}(\frac{r}{a},\theta) f(r,\theta) \tag{3.108}$$

$$= \frac{1}{a^2\pi \left| J_{n+1}(\lambda_j^{(n)})\right|^2} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} J_n(\lambda_j^{(n)}\frac{r}{a}) f(r,\theta) \tag{3.109}$$

3.8 Funciones cilíndricas generales

Vamos a usar de nuevo la función generadora poniendo $\tau = e^{i\theta}$. Usando el hecho de que

$$\frac{1}{2}(\tau - \frac{1}{\tau}) = i\sin\theta$$

obtenemos

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta} \tag{3.110}$$

Como tenemos

$$e^{iz\sin\theta} = \cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta) \tag{3.111}$$

podemos reescribir la serie (3.110) de la siguiente forma, separando parte real y parte imaginaria,

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(z)\cos 2m\theta \tag{3.112}$$

$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(z)\sin(2m+1)\theta \tag{3.113}$$

donde usamos la relación válida solamente para índice entero a saber: $J_{-n} = (-1)^n J_n$. En conclusión, las funciones de Bessel a índice entero son los coeficientes de Fourier de la función $\exp(iz\sin\theta)$. Invertiendo las series (3.112) y

(3.113), obtenemos las representaciones integrales de $J_n(z)$.

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \quad e^{i(n\theta - z\sin\theta)} \tag{3.114}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta) d\theta \tag{3.115}$$

$$J_{2m}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta)\cos(2m\theta) d\theta \tag{3.116}$$

$$J_{2m+1}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta)\sin\left((2m+1)\theta\right) d\theta \tag{3.117}$$

Podemos encontrar otras variantes de tales representaciones integrales. Se pueden obtener todas esas representaciones haciendo una prolongación de (3.114) para n complejo y cualquier función cilíndrica va a poder escribirse de la siguiente manera:

$$Z_n(z) \equiv c_n \int_D e^{i(n\omega + z\cos\omega)} d\omega \quad (\omega \in C) \tag{3.118}$$

donde D es un contorno bien seleccionado en el plano ω. De hecho, se puede demostrar que esta solución nos da la solución general de la ecuación de Bessel. Varias soluciones particulares se obtienen escogiendo un contorno particular D y fijando la constante c_n. Este método es debido a Schaefli y Sommerfeld (ver bibliografía para más detalles).

La solución general de la ecuación de Bessel, para n no-entero, es

$$Z_n(z) = c_1 J_n(z) + c_2 J_{-n}(z) \tag{3.119}$$

Obtenemos soluciones particulares para cada selección de las constantes $c_{1,2}$. Las soluciones tradicionales[1] son

funciones de Neumann o funciones de Bessel de 2o tipo.

$$Y_n(z) \equiv N_n(z) \equiv \frac{\cos(n\pi)J_n(z) - J_{-n}(z)}{\sin n\pi} \tag{3.120}$$

para $n \notin N$.

funciones de Hankel

$$H_n^{(1)}(z) \equiv J_n(z) + iN_n(z) \tag{3.121}$$

$$= \frac{e^{-in\pi}J_n(z) - J_{-n}(z)}{-i\sin n\pi} \tag{3.122}$$

$$H_n^{(2)}(z) \equiv J_n(z) - iN_n(z) \tag{3.123}$$

$$= \frac{e^{in\pi}J_n(z) - J_{-n}(z)}{i\sin n\pi} \tag{3.124}$$

[1] para los contornos correspondientes a esas soluciones tradicionales, ver A. Sommerfeld.

o inversamente,

$$J_n(z) = \frac{1}{2}\left(H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z)\right) \quad (3.125)$$

$$N_n(z) = \frac{1}{2i}\left(H_n^{(1)}(z) - H_n^{(2)}(z)\right) \quad (3.126)$$

Propiedades de conjugación compleja (n real)

$$J_n(\overline{z}) = \overline{J_n(z)} \quad (3.127)$$

$$N_n(\overline{z}) = \overline{N_n(z)} \quad (3.128)$$

$$H_n^{(1)}(\overline{z}) = \overline{H_n^{(2)}(z)} \quad (3.129)$$

$$H_n^{(2)}(\overline{z}) = \overline{H_n^{(1)}(z)} \quad (3.130)$$

Todas esas propiedades nos enseñan que J_n, N_n y $H_n^{(1,2)}$ tienen entre ellos dos respectivamente las mismas relaciones que las funciones trigonométricas cos, sin y exponenciales complejas. Podemos illustrarlo a partir del comportamiento asimptótico en $|z| \to \infty$ ($|z| \gg n, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$) y en particular para z real, tenemos

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)\left(1 + O(\frac{1}{z})\right)$$

$$N_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)\left(1 + O(\frac{1}{z})\right)$$

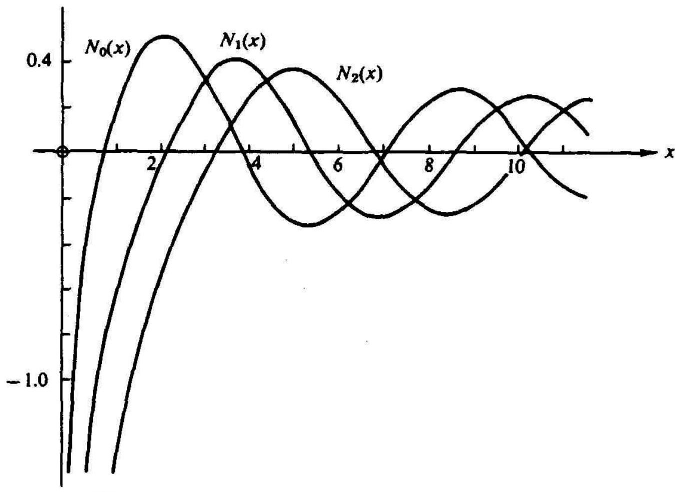
$$H_n^{(1,2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left[\pm i\left(z - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)\right]\left(1 + O(\frac{1}{z})\right)$$

Podemos también hallar el comportamiento de esas funciones cilíndricas cerca del origen y obtenemos, usando el comportamiento cerca de cero de $J_n(z)$,

$$N_n(z) \sim \frac{1}{n\pi}\left[\cos n\pi \Gamma(1-n)\left(\frac{z}{2}\right)^n - \Gamma(1+n)\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\right]$$

$$H_n^{(1)}(z) \sim \frac{i}{n\pi}\left[e^{-in\pi}\Gamma(1-n)\left(\frac{z}{2}\right)^n - \Gamma(1+n)\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\right]$$

Podemos concluir de todo esto que para cualquier valor de n real y no-entero, las tres funciones $N_n, H_n^{(1,2)}$ tienen siempre un polo en $z = 0$, además de un punto de ramificación. Veremos más tarde que eso quedo valido también para n entero. Eso implica restricciones sobre las soluciones de la ecuación de Bessel a usar para resolver un problema físico determinado.



Neumann functions, $N_0(x)$, $N_1(x)$, and $N_2(x)$

3.9 Funciones de Bessel con índice semi-entero (funciones de Bessel esféricas)

Como lo vimos anterioramente (ver curso de métodos matemáticos II), la parte radial de la ecuación de Helmholtz en tres dimensiones (y también en dimensiones impar cualquier) tiene como soluciones las funciones $(kr)^{-1/2}Z_{l+1/2}(kr)$.

Desde la sección 5, sabemos que

$$J_{1/2}(z) = c\frac{\sin z}{\sqrt{z}} \tag{3.131}$$

Para determinar el valor de la constante c, vamos a usar la definición en serie de $J_{1/2}(x)$:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \tag{3.132}$$

Usando la siguiente propiedad de la función Gamma,

$$\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\nu+1) = \sqrt{\pi}\frac{(2\nu+1)!}{2^{2\nu+1}} \tag{3.133}$$

$$\Rightarrow \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1} \tag{3.134}$$

$$\Rightarrow \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \tag{3.135}$$

De misma manera, tenemos

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \tag{3.136}$$

Vista la forma de esas funciones y también la forma de las soluciones de la parte radial de le ecuación de Helmholtz, vamos a introducir **las funciones de Bessel esféricas** con la siguiente definición:

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z) \tag{3.137}$$

$$n_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{n+1/2}(z) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-n-1/2}(z) \tag{3.138}$$

$$h_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(1)}(z) = j_n(z) + i n_n(z) \tag{3.139}$$

$$h_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{n+1/2}^{(2)}(z) = j_n(z) - i n_n(z) \tag{3.140}$$

En particlar, tenemos

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \tag{3.141}$$

$$n_0(z) = -\frac{\cos z}{z} \tag{3.142}$$

$$h_0^{(1)}(z) = -i\frac{e^{iz}}{z} \tag{3.143}$$

$$h_0^{(2)}(z) = i\frac{e^{-iz}}{z} \tag{3.144}$$

Aplicando las relaciones de recurrencia al caso $n = 1/2$, tenemos

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m j_0(z) = (-1)^m \frac{j_m(z)}{z^m} \tag{3.145}$$

para $m \geq 0$.

$$\Rightarrow \quad j_n(z) = (-z)^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{\sin z}{z} \tag{3.146}$$

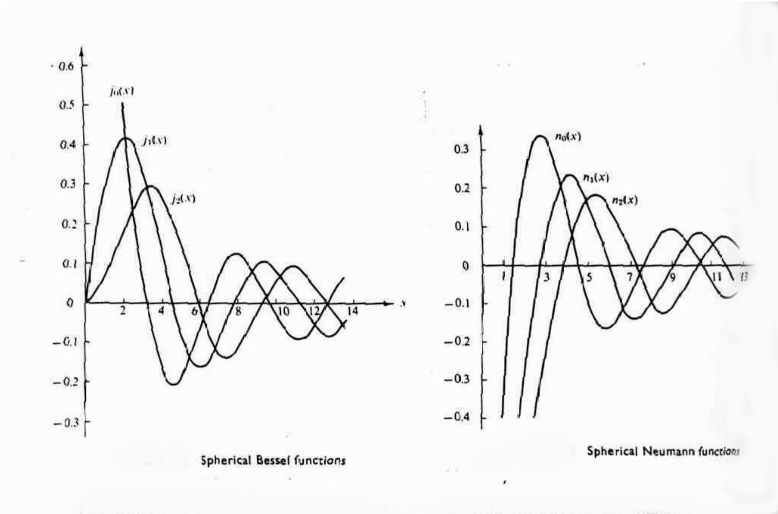
$$\Rightarrow \quad j_n(z) = P_{n+1}(\frac{1}{z}) \sin z + Q_n(\frac{1}{z}) \cos z \tag{3.147}$$

donde P_k y Q_k son polinomios de grado k.

Obtenemos también

$$n_n(z) = -(-z)^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{\cos z}{z} \tag{3.148}$$

$$h_n^{(1,2)}(z) = \mp i(-z)^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \frac{e^{\pm iz}}{z} \tag{3.149}$$



Todas esas funciones son funciones elementales. Además, $j_n(z)$ es regular en el origen y las otras tres funciones tienen polos de orden $(n+1)$.

Las funciones de Bessel esféricas tienen un papel importante en mecánica cuántica. Cada vez que resolvemos la ecuación de Schrödinger para una partícula libre en coordenadas polares (en particular en teoría de la disperón) vamos a usar las funciones de Bessel esféricas. Por ejemplo, el proceso más sencillo (difusión por un potencial central) es la difusión de una onda plana incidente en ondas esféricas saliendo. Entonces, la importancia de la fórmula dando la serie de una onda plana en ondas esféricas:

$$e^{i\vec{k}.\vec{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\gamma)$$

donde P_n es el polinomio de Legendre y γ es el ángulo entre $\vec{k}$ y $\vec{r}$.

3.10 Funciones de Neumann y de Hankel de índice entero (segunda solución de la ecuación de Bessel para n entero)

En la sección anterior, definimos las funciones de Neumann y de Hankel de índice no-entero como combinación lineal de dos soluciones linealmente independiente (J_n, J_{-n}) de la ecuación de Bessel. Para n entero, tenemos solamente una solución . En esta sección, vamos a construir una segunda solución a la Ec. de Bessel independiente de J_n.

Lo mas sencillo es de partir de la definición de la función de Neumann para

n no entero y después de pasar al límite $n \to m \in N$

$$N_m(z) = \lim_{n \to m} \frac{\cos n\pi J_n(z) - J_{-n}(z)}{\sin n\pi} = \frac{0}{0} \tag{3.150}$$

Aplicando la regla de l'Hospital, tenemos para $m > 0$,

$$\begin{aligned} N_m(z) &= \left. \frac{\frac{d}{dn}(...)}{\frac{d}{dn}(\sin n\pi)} \right|_{n=m} && (3.151) \\ &= \frac{-\pi \sin m\pi J_m(z) + \cos m\pi \frac{dJ_m}{dm} - \frac{dJ_{-m}}{dm}}{\pi \cos m\pi} && (3.152) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{dJ_m}{dm} - (-1)^m \frac{dJ_{-m}}{dm}\right] && (3.153) \end{aligned}$$

Nos queda a evaluar la ec. (3.153). Vamos a hacerlo para $z \sim 0$ para obtener el comportamiento de $N_m(z)$ cerca del origen. Usando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2\nu} && (3.154) \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(1+n)} \left(1 + O(z^2)\right) && (3.155) \\ \frac{d}{dn} a^{\pm n} &= \pm a^{\pm} \ln a && (3.156) \\ a^{\pm n} &\equiv \exp(\pm n \ln a) && (3.157) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial n} J_n(z) = \ln\frac{z}{2} J_n(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{\partial}{\partial n}(\sum_{\nu=0}^{\infty} ...) \tag{3.158}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \frac{1}{\pi} \ln\frac{z}{2}\left(J_n(z) + (-1)^n J_{-n}(z)\right) && (3.159) \\ &\quad + \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{\partial}{\partial n}(\sum_{\nu=0}^{\infty} ...) + (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \frac{\partial}{\partial n}(\sum_{\nu=0}^{\infty} ...) && (3.160) \\ &= \frac{2}{\pi} \ln\frac{z}{2} J_n(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^n A_n(z) + \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} B_n(z) && (3.161) \end{aligned}$$

El primer término da una singularidad logarítmica en $z = 0$ y el tercer término nos da un polo de orden n. Para obtener el comportamiento en $z \sim 0$, vamos a usar

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} J_n(z) &\sim \frac{\partial}{\partial n}\left(\left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(1+n)}\right) && (3.162) \\ &= \ln\frac{z}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(1+n)} - \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{F(n)}{\Gamma(1+n)} && (3.163) \end{aligned}$$

donde $F(n) \equiv \frac{d}{dn} \ln \Gamma(1+n)$ es la función digamma. Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} N_n(z) \quad &\sim \quad \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{\pi n!} \left(2 \ln \frac{z}{2} - F(n)\right) \\ &-\frac{1}{\pi} \left(-\frac{z}{2}\right)^{-n} \frac{F(-n)}{\Gamma(1-n)} \end{aligned} \tag{3.164}$$

para $n \geq 0$. En particular, tenemos

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma\right) \left(1 + O(z^2)\right) \tag{3.165}$$

donde $\gamma = -F(0) = 0.577...$ es la constante de Euler-Mascheroni. Y tenemos también

$$N_n(z) = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^n \left(1 + O(z^2)\right) \tag{3.166}$$

donde usamos

$$\frac{F(-n)}{\Gamma(1-n)} = (-1)^n (n-1)! \tag{3.167}$$

A partir de la función de Neumann y de la función de Bessel J_n, podemos introducir las funciones de Hankel de manera similar a lo que hicimos anterioramente:

$$H_n^{(1,2)}(z) = J_n(z) \pm i N_n(z)$$

y tienen las mismas singularidades en cero que la función de Neumann.

Como la función de Neumann es singular en el origen, esta solución tiene que ser rechazada en todo problema físico donde el origen pertenece al dominio de definición sobre el cual queremos resolver la ecuación de Bessel. Pero, esta solución tiene que ser conservada en el caso que el origen no es parte del dominio de definición. Típicamente, esos problemas son los problemas de tipo "geometría anular" muy importantes en física, por ejemplo en los siguientes problemas:

vibración de una membrana anular

cable coaxial

guía de ondas cilíndricas con iris

contador Geiger (cilindro con hilo conductor en el eje)

Ejemplo: vibración de una membrana anular

$$\triangle u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3.168}$$

- $u(r, \theta, t) = 0$ para $r = a, b$
- método de separación de variable: $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$
- $T(t) = e^{\pm i\omega t}$ con $\omega = kc$ donde k es la constante de separación.

- $\Theta(\theta) = e^{\pm im\theta}$ con la condición de periodicidad en $\theta \Rightarrow m \in Z$
- Para $R(r)$, obtenemos la siguiente ec.

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})R = 0 \tag{3.169}$$

$$\Rightarrow R(r) = aJ_m(kr) + bN_m(kr) \tag{3.170}$$

- Imponer condiciones de frontera:

$$aJ_m(ka) + bN_m(ka) = 0 \tag{3.171}$$

$$aJ_m(kb) + bN_m(kb) = 0 \tag{3.172}$$

  Este sistema de dos ecuaciones tiene una solución no-trivial si el determinante característico es cero, es decir si

$$J_m(ka)N_m(kb) - J_m(kb)N_m(ka) = 0 \tag{3.173}$$

  Esta ecuación transcendante tiene una infinidad de soluciones $k_j^{(m)}$ que determinan las frecuencias propias de vibración de la membrana, $\omega_j^{(m)} = k_j^{(m)}c$.

Entonces, la solución general es

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{jm}\left(\frac{J_m(k_j^{(m)}r)}{J_m(k_j^{(m)}a)} - \frac{N_m(k_j^{(m)}r)}{N_m(k_j^{(m)}a)}\right)e^{im\theta} \\ &\quad \left(e^{ik_j^{(m)}ct} + A_j e^{-ik_j^{(m)}ct}\right) \end{aligned} \tag{3.174}$$

3.11 Funciones emparentadas a las funciones de Bessel

Numeras ecuaciones de la física matemática pueden escribirse como una ecuación de Bessel por substitución simple.

Por ejemplo, la ecuación

$$U'' + \frac{1}{z}U' - (1 + \frac{n^2}{z^2})U = 0 \tag{3.175}$$

puede escribirse como una ecuación de Bessel haciendo la substitución $z \rightarrow -it$. Esas soluciones son llamadas funciones de Bessel modificadas o hiperbólicas:

$$I_n(z) = i^{-n}J_n(iz) \tag{3.176}$$

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2}i^{n+1}H_n^{(1)}(iz) \tag{3.177}$$

$I_n(z)$ son dichas de primer tipo y $K_n(z)$, de segundo tipo. Podemos hallar su comportamiento $|z| \to \infty$,

$$I_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left(1 + O(z^{-1})\right) \tag{3.178}$$

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O(z^{-1})\right) \tag{3.179}$$

También podemos definir las funciones modificadas esféricas:

$$i_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{n+1/2}(z) \tag{3.180}$$

$$k_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} K_{n+1/2}(z) \tag{3.181}$$

y según lo esperado, tenemos

$$i_0(z) = \frac{\sinh z}{z} \tag{3.182}$$

$$k_0(z) = \frac{e^{-z}}{z} \tag{3.183}$$

Varias funciones emparentadas a las funciones de Bessel son usadas por ejemplo en electrónica, en óptica. Así, por ejemplo, las funciones son definidas por Kelvin

$$I_0(i^{1/2}x) = ber(x) + i\ bei(x) \tag{3.184}$$

$$K_0(i^{1/2}x) = Ker(x) + i\ Kei(x) \tag{3.185}$$

que verifican la ecuación

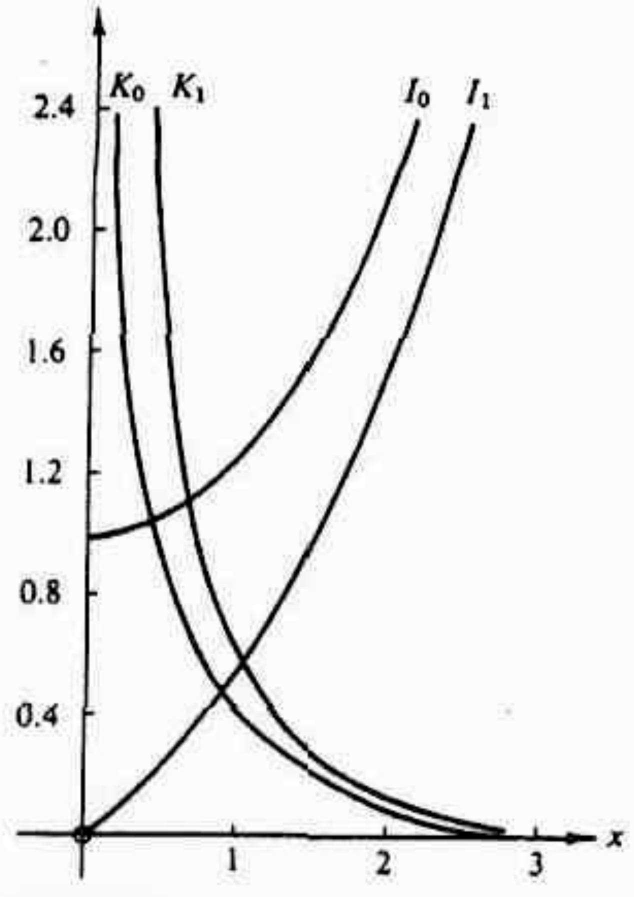
$$U^{''} + \frac{1}{x}U^{'} - iU = 0 \tag{3.186}$$

Otro ejemplo, las funciones de Airy $A_{\pm}(z)$ que son soluciones de la ecuación

$$A^{''}(z) - zA(z) = 0 \tag{3.187}$$

y son definidas de la siguiente manera en término de funciones de Bessel:

$$A_{\pm}(z) = \sqrt{z} J_{\pm 1/3} \left(\frac{2}{3} i z^{3/2}\right) \tag{3.188}$$



Modified Bessel functions

Capitulo 4

La función Gamma de Euler

4.1 Definición

La función Gamma de Euler, $\Gamma(z)$, introducida por Euler, generaliza a valores complejos el factorial $n!$ definido solamente para n entero positivo. La función Gamma tiene 3 definiciones clásicas complementarias:

4.1.1 Integral definida (Euler)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \mathrm{Re} z > 0 \tag{4.1}$$

Esta definición define una función analítica en el semi-plano $z > 0$ y también nos da el valor en $z = 1$,

$$\Gamma(1) = 1 \tag{4.2}$$

Y por integración por partes, obtenemos

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{4.3}$$

En consecuencia, para n entero positivo, tenemos

$$\Gamma(n) = n! \tag{4.4}$$

Entonces, $\Gamma(z)$ es la generalización del factorial. Notamos que las dos relaciones anteriores no garantizan la unicidad de esta generalización . En efecto, si $P(z)$ es una función periódica de periódo 1 tal que $P(n) = 1, \forall n \in Z$, entonces la función $F(z) = P(z)\Gamma(z)$ verifica también la relación siguiente para n entero positivo:

$$F(n) = n! \tag{4.5}$$

Tenemos unicidad de la función Gamma de Euler si imponemos la condición suplementaria siguiente:

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \Gamma(z) > 0 \tag{4.6}$$

4.1.2 Límite infinito (Gauss)

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)..(z+n)} \tag{4.7}$$

con $z \neq 0, -1, -2, ...$ Esta definición implica las relaciones (4.2) y (4.3) pero además, eso nos enseña que la función Gamma es una función metamorfa que tiene polos sencillos en $z = 0, -1, -2, ...$ y es holomórfica a fuera de esos polos.

4.1.3 Producto infinito (Weierstrass)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n})e^{-z/n} \tag{4.8}$$

donde $\gamma = 0.577216...$ es llamada la constante de Euler-Mascheroni y es definida como el siguiente límite

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n) \tag{4.9}$$

La definición (4.8) nos enseña que la función Gamma no tiene cero ya que el miembro derecho de la ecuación (4.8) es visiblemente una función entera. Podemos llegar a la definición de la función Gamma como producto infinito a partir de la definición de Gauss (límite infinito),

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)..(z+n)}{n!n^z} \tag{4.10}$$

$$= \lim_{n\to\infty} z(1+z)(1+\frac{z}{2})...(1+\frac{z}{n})e^{-z\ln n} \tag{4.11}$$

$$= z \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} (1 + \frac{z}{m})e^{-z\ln n} \tag{4.12}$$

Multiplicando y dividiendo por

$$e^{z(1+\frac{1}{2}+...\frac{1}{n})} = \prod_{m=1}^{n} e^{\frac{z}{m}}$$

obtenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= z \lim_{n\to\infty} e^{z(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}-\ln n)} \prod_{m=1}^{n}(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}} \\
&= z \lim_{n\to\infty} e^{z(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}-\ln n)} \lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}} \\
&= z e^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{z}{m})e^{-\frac{z}{m}}
\end{aligned}$$

Notamos sin demostrar las relaciones siguientes que vamos a usar varias veces:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z} && (4.13)\\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} && (4.14)\\
\Gamma(n+1/2) &= \frac{1}{2}.\frac{3}{2}....\frac{2n-1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} && (4.15)
\end{aligned}$$

Visto la definición de Gamma como producto infinito, es más comodo hallar su derivada logarítmica que su derivada normal. Así vamos a definir la función de gamma de la siguiente manera:

$$F(z) \equiv \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1) \qquad (4.16)$$

En la literatura, podemos también encontrar la función $\Psi(z)$ definido como

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = F(z-1) \qquad (4.17)$$

A partir de la definición como producto infinito, vamos a obtener la función digamma,

$$\begin{aligned}
-\ln\Gamma(z+1) &= \ln(z+1)+\gamma(z+1)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\ln\frac{z+n+1}{n}-\frac{z+1}{n}\right) \\
&\Rightarrow \quad -F(z) = \frac{1}{z+1}+\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z+n+1}-\frac{1}{n}) && (4.18)\\
&\Rightarrow \quad F(z) = -\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}) && (4.19)
\end{aligned}$$

Es claro que $F(z)$ tiene un polo sencillo para $z = -1, -2, ...$ y calculamos directamente que

$$\begin{aligned}
F(0) &= -\gamma && (4.20)\\
F(k) &= -\gamma+(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}) && (4.21)
\end{aligned}$$

para $k \in N$. Es fácil, a partir de las relaciones dadas anterioramente de obtener el residuo de $F(k)$ en $z = -k$:

$$\lim_{z \to -k} (z+k)F(z) = -1 \tag{4.22}$$

Notamos que $F(z)$ y $\Gamma(z+1)$ tienen polos sencillos exactamente en los mismos puntos $z = -1, -2, -3, ...$ Entonces, el cociente $F(z)/\Gamma(z+1)$ es una función entera y su valor en $z = -k$ es el cociente de los residuos.

Definimos la derivada succesivas de la función digamma para obtener las funciones poligamma. Por ejemplo, tenemos

$$F^{(1)}(z) = \frac{d}{dz}F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \tag{4.23}$$

4.2 Formula de Stirling

Usamos muchas veces una representación aproximada de la función Gamma. Este aproximación nos es dada por la fórmula de Stirling que va a darnos un expresión asintótica para $\Gamma(z)$ en el caso $z \to \infty$,

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + O(\frac{1}{z^2})\right) \tag{4.24}$$

Vamos a usarla para el cálculo de $\Gamma(z)$ en $z = -k$ a partir de su definición como límite infinito,

$$\begin{aligned}
(z+k)\Gamma(z)|_{z=-k} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{-k}}{(-k)(-k+1)..2.1.1.2...(-k+n)} \\
&= (-1)^k \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1/2} e^{-(n+1)} n^{-k}}{(n+1-k)^{n+1/2-k} e^{-(n+1-k)}}
\end{aligned}$$

donde usamos la fórmula de Stirling para obtener la última línea. El límite de la última línea vale uno como tenemos,

$$\left(\frac{n+1}{n+1-k}\right)^n \left(\frac{n+1}{n+1-k}\right)^{1/2} \left(\frac{n}{n+1-k}\right)^{-k} e^{-k}$$

y usando la siguiente relación

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{k}{n+1}}\right)^n = e^k$$

En conclusión, tenemos

$$\begin{aligned}
(z+k)\Gamma(z)|_{z=-k} &= \frac{(-1)^k}{k!} &(4.25)\\
(z+k)F(z)|_{z=-k} &= -1 &(4.26)
\end{aligned}$$

Y entonces,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{F(z)}{\Gamma(z+1)}\right|_{z=-k} &= \left.\frac{(z+k)F(z)}{(z+k)\Gamma(z+1)}\right|_{z=-k} \\
&= \frac{(z+k)F(z)|_{z=-k}}{(z+k-1)\Gamma(z)|_{z=-k+1}} \\
&= (-1)^k(k-1)! \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Encontramos muchas veces la fórmula de Stirling en la forma siguiente:

$$z! = \sqrt{2\pi}z^{z+1/2}e^{-z}\left(1+\frac{1}{12z}+O(\frac{1}{z^2})\right) \qquad (4.28)$$

Esta relación es equivalente a la fórmula (4.24), si recordamos que

$$\lim_{z\to\infty}(1-\frac{m}{z})^z = me^{-1} \qquad (4.29)$$

Al contrario de todas las funciones estudiadas en este curso (que son de hecho todas, casos particulares de funciones hipergeométricas o hipergeométricas confluentes), la función Gamma de Euler no satisface ninguna ecuación diferenciale con coeficientes algebráicos.

Capitulo 5

Puntos singulares y soluciones en series de ecuaciones diferenciales (método de Frobenius)

5.1 Puntos singulares

En este sección, vamos a introducir la noción de punto singular de una ecuación diferencial. El interés en esta noción viene de su utilidad para, primero, clasificar las ecuaciones diferenciales y segundo, para encontrar una solución en serie (método de Frobenius, teorema de Fuch).

Todas las ecuaciones diferenciales que estudiamos hasta ahora pueden escribirse de la siguiente manera:

$$y^{''} = f(x, y, y^{'}) \tag{5.1}$$

donde $y^{'} = \frac{dy(x)}{dx}$ y $y^{''} = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$.

Si en este ecuación, y y $y^{'}$ pueden tomar cualquier valor finito en $x = x_0$ y $y^{''}$ es finito, vamos a decir que el punto $x = x_0$ es un **punto ordinario.**

Si en este ecuación, $y^{''}$ tiende al infinito para una elección de valores finitos de y y $y^{'}$, el punto $x = x_0$ se llama **punto singular.**

Otra manera de presentar la definición de punto singular es escribiendo nuestra ecuación diferencial de la manera usual:

$$y^{''} + P(x)y^{'} + Q(x)y = 0 \tag{5.2}$$

Si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son finitos a $x = x_0$, el punto $x = x_0$ es un punto ordinario. Al contrario, si $P(x)$ y/o $Q(x)$ tienen una singularidad en $x = x_0$, el punto $x = x_0$ es un punto singular.

Usando la ecuación (5.2), podemos distinguir entre dos tipos de puntos singulares:

- Si $P(x)$ y/or $Q(x)$ tienen una singularidad en $x = x_0$, pero tenemos que

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)P(x) \text{ es finito} \tag{5.3}$$
$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) \text{ es finito} \tag{5.4}$$

  entonces, el punto x_0 se llama **punto singular no-esencial o punto singular regular.**

- Si $P(x)$ diverge más rapidamente que $1/(x - x_0)$, de tal manera que

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)P(x) \ = \infty \tag{5.5}$$

  o si $Q(x)$ diverge más rapidamente que $1/(x - x_0)^2$, de tal manera que

$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \infty, \tag{5.6}$$

  entonces, el punto x_0 se llama **singularidad esencial o singularidad irregular.**

Esas definiciones son válidas para cualquier valor finito x_0. El análisis de los puntos al infinito ($x \to \infty$) se hace usando el cambio de variable $x = 1/z$, asi, estudiar $x \to \infty$ es equivalente a estudiar la ecuación para $z \to 0$. Pero, primero tenemos que expresar la ecuación en termino de la variable z:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(z^{-1})}{dz}\frac{dz}{dx} = -z^2\frac{dy(z^{-1})}{dz} \tag{5.7}$$
$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = 2z^3\frac{dy(z^{-1})}{dz} + z^4\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2} \tag{5.8}$$

Así la ecuación se transforma como

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2} + (2z^3 - z^2P(z^{-1}))\frac{dy}{dz} + Q(z^{-1})y = 0 \tag{5.9}$$

y podemos aplicar la definición anterior de singularidad esencial o no-esencial en el punto $z = 0$. En tal caso, las funciones que van a determinar si $z = 0$ es un punto singular o no son las funciones

$$\frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} \tag{5.10}$$
$$\frac{Q(z^{-1})}{z^4} \tag{5.11}$$

en lugar de $P(x)$ y $Q(x)$.

5.1.1 Ejemplo: la ecuación de Bessel

$$x^2 y^{''} + x y^{'} + (x^2 - n^2) y = 0 \tag{5.12}$$

$$\Rightarrow \quad P(x) = \frac{1}{x} \tag{5.13}$$

$$\Rightarrow \quad Q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2} \tag{5.14}$$

Entonces, el punto $x = 0$ es un singularidad regular. Pero para $x \to \infty$, tenemos ($z = 1/x$) como coeficientes de la ecuación en z,

$$P(z) \quad = \quad 1/z \tag{5.15}$$

$$Q(z) \quad = \quad \frac{1 - n^2 z^2}{z^4} \tag{5.16}$$

Como el segundo coeficiente diverge como z^{-4} en $z = 0$, el punto $x \to \infty$ es una singularidad irregular o esencial.

5.2 Solución en serie (método de Frobenius).

En esta sección, vamos a desarrollar un método para obtener una solución de una ecuación diferencial de 2o grado, homogénea y líneal. Este metodo funcionará siempre que el punto de expansión no tiene un comportamiento peor que un punto singular regular.

Como siempre podemos escribir tal ecuación de la siguiente manera:

$$y^{''} + P(x) y^{'} + Q(x) y = 0 \tag{5.17}$$

Vamos a tratar de obtener una solución de esta ecuación diferencial substituyendo en la ecuación una serie de Taylor con coeficientes no-determinados. Para ilustrar el método, vamos a aplicarlo a dos ecuaciones diferenciales que aparecen en varios problemas físicos.

Primero, consideramos la ecuación del oscilador lineal

$$y^{''} + \omega^2 y = 0 \tag{5.18}$$

con las soluciones conocidas $y(x) = \sin \omega x$, $\cos \omega x$.

Vamos a buscar una solución en serie. Para ello, vamos a escribir la solución $y(x)$ de la siguiente manera

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{k+j} \tag{5.19}$$

con $a_0 \neq 0$ y k puede ser cualquier número (no tiene que ser entero).Entonces,

$$y^{'}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (k+j) x^{k+j-1} \tag{5.20}$$

$$y^{''}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (k+j)(k+j-1) x^{k+j-2} \tag{5.21}$$

Sustituyendo esas relaciones en la ecuación inicial, obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(a_j (k+j)(k+j-1) x^{k+j-2} + \omega^2 a_j x^{k+j} \right) = 0 \tag{5.22}$$

Los coeficientes de cada potencia en x tienen que anularse, eso nos da dos ecuaciones:

- $a_0 k(k-1) = 0$ para $j = 0$ (ecuación indicial). Entonces, tenemos dos soluciones como $a_0 \neq 0$,

$$\Rightarrow k = 0, 1$$

- $a_{j+2}(k+j+2)(k+j+1) + \omega^2 a_j = 0$

$$\Rightarrow a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)}$$

  lo que nos da la relaciòn de recurrencia sobre los coeficientes a_j.

Como a_1 es arbitrario, podemos tomarlo igual a cero. Así, obtenemos las dos soluciones siguientes:

1. $k = 0 \Rightarrow a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+2)(j+1)}$

$$\Rightarrow a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0$$
$$\Rightarrow y(x) = a_0 \cos \omega x$$

2. $k = 0 \Rightarrow a_{j+2} = -a_j \frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)}$

$$\Rightarrow a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0$$
$$\Rightarrow y(x) = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega x$$

Hay dos puntos sobre cuales tenemos que insistir:

- la solución en serie tiene que ser siempre sustituida en la ecuación inicial para verificar si es o no una solución (para evitar errores lógicos o algebráicos)
- la solución en serie será aceptada como solución si la serie es convergente. Es posible que el método de Frobenius da una solución que satisface la ecuación original pero no converge sobre la región de interés.

5.3 Limitaciones del método de Frobenius-Ecuación de Bessel.

Vamos a aplicar el método de Frobenius a la ecuación de Bessel:

$$x^2y^{''} + xy^{'} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{5.23}$$

De nuevo suponemos encontrar una solución de la siguiente forma

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{k+j} \tag{5.24}$$

Usando esta expresión en la ecuación de Bessel, obtenemos, como en el caso anterior, las siguientes ecuaciones:

1. $a_0(k(k-1) + k - n^2) = 0 \Rightarrow k = \pm n$ (ecuación indicial)
2. $a_1(k+1-n)(k+1-n) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$
3. $a_j\left((k+j)(k+j-1) + (k+j) - n^2\right) + a_{j-2} = 0$

$$k = n \Rightarrow a_{j+2} = \frac{-a_j}{(2n+j+2)(j+2)}$$

Asi obtenemos

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0\frac{1}{2(2n+2)} = \frac{-a_0}{2^2 1!}\frac{n!}{(n+1)!} \\ a_4 &= -a_2\frac{1}{4(2n+4)} = \frac{a_0}{2^4 2!}\frac{n!}{(n+2)!} \\ a_6 &= -a_4\frac{1}{6(2n+6)} = \frac{a_0}{2^6 3!}\frac{n!}{(n+3)!} \\ &\quad\quad ..... \end{aligned}$$

Y en general, tenemos

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{a_0 n!}{2^{2p} p!(n+p)!}$$

Entonces, obtenemos,

$$y(x) = a_0 2^n n! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(n+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}$$

Y aquí, podemos reconocer la definición en serie de la función de Bessel $J_n(x)$.

Para $k = -n$ y n no-entero, podemos general una segunda solución en serie que va a corresponder a $J_{-n}(x)$. Pero cuando n es entero, tenemos problemas porque en la solución en serie, el denominador se anula cuando $j + 2 = 2n$ y el coeficiente a_{j+2} explota y entonces, no puedemos encontrar una segunda solución usando el método de Frobenius.

5.4 Singularidades regulares y irregulares.

El éxito del método de Frobenius va a depender de dos cosas, las raíces de la ecuación indicial y el grado de singularidad de los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ en la ecuación diferencial original. Para ilustrar eso, tenemos los siguientes 4 ejemplos:

$$y^{''} - \frac{6}{x^2} y = 0 \tag{5.25}$$

$$y^{''} - \frac{6}{x^3} y = 0 \tag{5.26}$$

$$y^{''} + \frac{1}{x} y^{'} - \frac{a^2}{x^2} y = 0 \tag{5.27}$$

$$y^{''} + \frac{1}{x^2} y^{'} - \frac{a^2}{x^2} y = 0 \tag{5.28}$$

La ecuación indicial de la Ec.(5.25) es

$$k^2 - k - 6 \Rightarrow k = 3, -2$$

Como la ecuación es homogenea en x, no hay relación de recurrencia y la solución es

$$y(x) = Ax^3 + Bx^{-2}$$

La ecuación indicial de la Ec.(5.26) es

$$-6a_0 = 0$$

entonces, no hay solución con $a_0 \neq 0$, y el método de Frobenis no funciona para darnos una solución en serie de esta ecuación. La diferencia entre las Ec. (5.25) y (5.26) es que el punto $x = 0$ es una singularidad regular en la Ec.(5.25) e irregular en la Ec.(5.26).

En la Ec.(5.27), la Ec. indicial es igual a

$$k^2 - a^2 = 0$$

y no hay relaciones de recurrencia. Entonces, la solución es

$$y(x) = Ax^a + Bx^{-a}$$

Para la Ec. (5.28), la situación es muy diferente. La ecuación indicial es igual a

$$k = 0$$

y la relación de recurrencia es

$$a_{j+1} = a_j \frac{a^2 - j(j-1)}{j+1}$$

A menos que escojamos a para parar la serie, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_J} \right| &= \lim_{j\to\infty} \frac{j(j-1)}{j+1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Entonces, la serie no es convergente y eso significa que el método de Frobenius no va a funcionar en este caso. De nuevo, tenemos que el caso del la ec. (5.27), el origen es un punto singular regular y en el caso de la ec. (5.28) es un singularidad esencial. Eso nos lleva al teorema de Fuch que va a formalizar lo que vimos en los ejemplos anteriores:

$\boxed{\text{Teorema de Fuch:}}$

Podemos siempre obtener al menos una solución en serie, si hacemos el expansión alrededor de un punto ordinario o en el peor de los casos, un punto singular regular. Este método puede no funcionar si hacemos la expansión alrededor de un singularidad esencial o irregular.

Capitulo 6

Operadores en el espacio de Hilbert

6.1 Funcionales lineales, contínuas, espacio dual

Sea H un espacio de Hilbert. Una **funcional** sobre H es una aplicación $L : H \to C(R)$. Una funcional se define

- lineal si y solo si (ssi)

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \tag{6.1}$$

  $\forall \alpha, \beta \in C$ y $\forall f, g \in H$.

- contíinua ssi $\exists c > 0$ t.q. $\forall f \in H$, tenemos

$$|L(f)| \leq c||f|| \tag{6.2}$$

  El número más pequeño c verificando esta condición se llama **norma de** L y se nota $||L||$. Tenemos

$$||L|| = \sup_{f \in H} \frac{|L(f)|}{||f||} = \sup_{f \in H, ||f||=1} |L(f)| \tag{6.3}$$

El conjunto de las funcionales lineales contínuas sobre H forman un espacio vectorial, notado $H^{'}$ y se llamo **espacio dual de** H.

Ejemplos:

Sea $H = L^2(R)$ y consideramos las funcionales siguientes

- $L_1(f) = f(x_0)$ definida si $f \in C^0(R)$

- $L_2(f) = f^{(n)}(x_0)$ definida si $f \in C^\infty(R)$
- $L_3(f) = \int_a^b f(x)dx$ definida si f es integrable sobre $[a, b]$.
- $L_4(f) =< g|f >$.

Esto va a llevarnos a un primer teorema muy importante por que va a darnos una relación de isomorfismo entre cualquier espacio de Hilbert y su dual. Es el teorema de Riesz-Frechet o más comunmente llamado el lema de Riesz:

$\boxed{\text{Teorema de Riesz-Frechet (lema de Riesz)}}$

Cualquier funcional lineal continua L sobre un espacio de Hilbert H es dada por un vector único $h_L \in H$ t.q.

$$L(f) =< h_L|f > \tag{6.4}$$

$\forall f \in H$. Tenemos además que $||L|| = ||h_L||$.

El teorema de Riesz-Frechet significa que H y su dual $H^{'}$ son anti-isomórficos. La biyección

$$g \in H \Leftrightarrow L_g =< g|f >\in H^{'} \tag{6.5}$$

es anti-lineal. Entonces, el dual es también un espacio de Hilbert con el producto escalar definido de la siguiente manera:

$$< L_f|L_g >=< g|f > \tag{6.6}$$

y en particular, el dual es completo. Esta situación justifica la notación de Dirac. Dirac va a escribir la biyección entre H y $H^{'}$ de forma simétrica:

$$|g >\in H \Leftrightarrow< g| \in H^{'} \tag{6.7}$$

Y el producto escalar:

$$< g|f >=< g|(|f >) \tag{6.8}$$

Esta notación es de uso común para los físicos (particularmente en mecánica cuántica).

<u>Demostración del lema de Riesz:</u> Sea $KerL = N = \{f \in H, t.q.L(f) = 0\}$ es un subespacio hilbertiano ya que L es continua. Así, podemos escribir:

$$H = N \bigoplus N^\perp \tag{6.9}$$

(1) Si $L = 0$, $N = H$ y $h_L = 0$.

(2) Si $L \neq 0$, $\exists f_0 \in N^\perp$ con $f_0 \neq 0$ y $L(f_0) \neq 0$. Lo normalizamos a $||f_0|| = 1$ y definimos $h_L = \overline{L(f_0)} f_0$:

- si $f \in N$,

$$< h_L|f >\sim< f_0|f >= 0 = L(f) \tag{6.10}$$

- Si $f = \alpha f_0$,

$$< h_L|f >= \alpha < h_L|f_0 >= \alpha L(f_0) = L(f) \tag{6.11}$$

Entonces, $< h_L|$ y L coinciden sobre N y sobre el subespacio a 1 dimensión engendrado por f_0 ($[f_0]$). Pero, esto es valido para H completo ya que $\forall f \in H$, podemos escribir f de la manera siguiente y única:

$$f = \left(f - \frac{L(f)}{L(f_0)} f_0\right) + \frac{L(f)}{L(f_0)} f_0 \tag{6.12}$$

donde el primero término es elemento de N y el ultimo es elemento de $[f_0]$.

La unicidad de h_L es evidente. En cuanto a la norma tenemos

$$\begin{aligned} ||L|| &= \sup_{||f||=1} |L(f)| && (6.13)\\ &= \sup_{||f||=1} | < h_L|f > | && (6.14)\\ &\leq \sup_{||f||=1} ||h_L||||f|| && (6.15)\\ &= ||h_L|| && (6.16) \end{aligned}$$

6.2 Operadores lineales acotados

Sea H un espacio de Hilbert. Llamamos un operador linel en H, una aplicación lineal definida de la siguiente manera:

$$A : D(A) \to H \tag{6.17}$$

donde $D(A)$ es el sub-espacio vectorial de H llamado dominio de A.
Ejemplos

- operador de derivación
$$p = \frac{1}{i}\frac{d}{dx} \tag{6.18}$$
definido sobre $D(p) = C_0^\infty(R)$

- operador diferencial:
$$D_n f = \sum_{j=0}^{n} a_j(x) \left(\frac{d^j}{dx^j}\right) f(x) \tag{6.19}$$
definido sobre $C_0^\infty(R)$

- operador integral:
$$(Kf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y) f(y) dy \tag{6.20}$$
con $k(x,y) \in C_0^\infty(R^2)$. La función $k(x,y)$ se llamo nucleo del operador K. $D(K) = C_0^\infty(R)$.

- operador no-lineal:

$$(Af)(x) = \frac{d}{dx}f + h(x) \tag{6.21}$$

- operador de multiplicación por una función g acotada.

$$M_g f(x) = g(x)f(x) \tag{6.22}$$

$D(M_g) = H$.

En las próximas secciones, vamos a tomar casi siempre operadores definidos sobre todo H $(D(A) = H)$.

Sea $A : H \to H$, un operador lineal. Definimos los conceptos siguientes:

- A es continua en f_0 si $f_n \to f_0 \Rightarrow Af_n \to Af_0$
- A es continua si A es continua en cualquier $f \in H$.
- A es acotado si $\exists c > 0$ t.q. $\forall f \in H$,

$$||Af|| \leq c||f|| \tag{6.23}$$

El número más pequeño c verificando esta relación se llamo norma de A y se nota $||A||$.

$$||A|| = \sup_{f \neq 0} \frac{||Af||}{||f||} = \sup_{||f||=1} ||Af|| \tag{6.24}$$

De hecho, esas 3 nociones son equivalentes y vamos a probarlo en el siguiente teorema:

Teorema: Sea $A : H \to H$ un operador lineal. Entonces las 3 propiedades siguientes son equivalentes:

(i) A es acotado.

(ii) A es continua.

(iii) $\exists f_0 \in H$ t.q. A es continua en f_0.

Demostración
(i)$\Rightarrow$ (ii):

$$||Af_n - Af|| \leq ||A||||f_n - f|| \to 0 \tag{6.25}$$

$\forall f_n \to f \in H$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): evidente

(iii) $\Rightarrow$ (i):
Por eso, vamos a suponer que A no es acotado, entonces, $\forall n, \exists f_n$ t.q .

$$||Af_n|| > n||f_n|| \tag{6.26}$$

Sea $g_n = \frac{1}{n}\frac{f_n}{||f_n||} + f_0$, tenemos

$$g_n \to f_0 \tag{6.27}$$

como $||g_n - f_0|| = \frac{1}{n}$. Como A es continua en f_0, tenemos $Ag_n \to Af_0$ y entonces,

$$Ag_n - Af_0 = \frac{1}{n}\frac{Af_n}{||f_n||} \to 0 \tag{6.28}$$

pero eso es imposible porque, por(6.26), tenemos $\frac{1}{n}\frac{||Af_n||}{||f_n||} > 1 \forall n$. $\Rightarrow$ contradicción y A tiene que ser acotado.

Notamos en general

- $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ el conjunto de los operadores acotados de $H_1 \to H_2$ (en particular, $\mathcal{B}(H, C) = H^{'}$).
- $\mathcal{B}(H)$ es el conjunto de los operadores acotados de $H \to H$.

Teorema:

Sea H un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}(H)$ el conjunto de los operadores acotados, definidos en todos puntos de H. Entonces, con la norma de los operadores como definida anteriormente, $\mathcal{B}(H)$ es un espacio de Banach (espacio normado completo).

Demostración:

1. $\mathcal{B}(H)$ es un espacio vectorial y $\|.\|$ es una norma

   - $A, B \in \mathcal{B}(H) \Rightarrow \alpha A + \beta B \in \mathcal{B}(H)$ y tenemos
     $$(\alpha A + \beta B)f = \alpha(Af) + \beta(Bf)$$
     para cualquier $\alpha, \beta \in R, C$.
   - $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
   - $\|\alpha A\| \leq |\alpha| \, \|A\|$

2. $\mathcal{B}(H)$ es completo para esta norma. Por eso, vamos a tomar una sucesión de Cauchy de $\mathcal{B}(H)$, sea $\{A_n\} \in \mathcal{B}(H)$, una tal sucesión de Cauchy de operadores acotados. En tal caso, tenemos,

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \quad t.q. \; \forall n, m > N, \|A_m - A_n\| < \varepsilon \tag{6.29}$$

   $\Rightarrow \forall f \neq 0$, tenemos por la definición de la norma,

   $$\|A_m f - A_n f\| \leq \varepsilon \, \|f\| \quad (n, m > N) \tag{6.30}$$

Entonces, $\{A_n f\}$ es una sucesión de Cauchy en H. Como H es completo, esta sucesión va a converger a un elemento $f_0 \in H$. Definimos el operador lineal A por la relación:

$$Af = f_0 \Leftrightarrow Af = \lim_{n\to\infty} A_n f \tag{6.31}$$

Este operador es linel, definido en todo H y acotado. Por probar eso, tomamos el límite $m \to \infty$ en la ec.(6.29), obtenemos

$$\|Af - A_n f\| \leq \varepsilon \|f\| \quad (n > N) \tag{6.32}$$

y entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \|Af\| &\leq \|Af - A_n f\| + \|A_n f\| \\ &\leq (\varepsilon + \|A_n\|) \|f\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{B}(H)$ y además, $A_n \to A$ en $\mathcal{B}(H)$ por que tenemos por la relación (6.32) que

$$\|A - A_n\| \leq \varepsilon \quad (n > N)$$

Podemos generalizar este teorema en el caso de $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ y obtenemos el siguiente teorema:

Teorema:

Si H_1 es un prehilbertiano y H_2 espacio de Hilbert (completo), el espacio $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ de los operadores lineales acotados, definidos de H_1 en H_2 es un espacio de Banach para la norma de los operadores.

En el caso $H_1 = H_2$, podemos no solamente adicionar 2 operadores pero también multiplicarlos. Entonces, $\mathcal{B}(H)$ tiene una estructura de álgebra no-comutativa con la multiplicación de dos operadores definidos de la siguiente manera:

$$(AB)f = A(Bf) \tag{6.33}$$

Esta multiplicación es continua por que

$$\|AB\| \leq \|A\| \; \|B\| \tag{6.34}$$

y verifica las reglas usuales de un álgebra:

- asociatividad
$$(AB)C = A(BC) \tag{6.35}$$
- distributividad
$$A(B + C) = AB + AC \tag{6.36}$$

pero no es conmutativa. La falta de conmutatividad es medido por el conmutador:

$$[A, B] = AB - BA \tag{6.37}$$

Además, esta álgebra tiene un elemento unidad , I,:

$$\begin{aligned} If &= f \quad \forall f \in H & (6.38) \\ IA &= AI = A \quad \forall f \in \mathcal{B}(H) & (6.39) \end{aligned}$$

La álgebra $\mathcal{B}(H)$ tiene también una **involución** $A \to A^*$. Entonces, vamos a decir que $\mathcal{B}(H)$ es un $*$**-álgebra.** El operador A^* , llamado el **operador adjunto** va a definirse de la siguiente manera:

Para cualquier $f, g \in H$, la expresión

$$F_f^A(g) \equiv < f|Ag > \tag{6.40}$$

es una funcional lineal de g, continua en virtud de la desigualdad de Schwarz y del hecho que A es acotado. Entonces, tenemos

$$\left\|F_f^A(g)\right\| = |< f|Ag >| \leq \|A\| \ \|f\| \ \|g\| \tag{6.41}$$

Por el teorema de Riesz-Frechet, unicamente existe h tal que $h \in H$ y

$$F_f^A(g) =< h|g > \tag{6.42}$$

Este vector depende linealmente del vector f, así podemos definir el operador A^* por la relación

$$A^* f = h$$

lo que significa

$$\langle A^* f|g\rangle =< f|Ag > \tag{6.43}$$

para cualquier $f, g \in H$. En la práctica, para hallar el adjunto de cualquier operador, es esta relación que vamos a usar. El operador así definido es lineal, definido en todo H y acotado:

$$\begin{aligned} \|A^*\| &= \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle A^* f|g\rangle| \\ &= \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle f|Ag\rangle| \\ &= \|A\| & (6.44) \end{aligned}$$

Entonces, la correspondencia $A \to A^*$ es **una involución antilineal sobre** $\mathcal{B}(H)$ verificando las propiedades siguientes:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ con $\alpha \in C$.
- $(AB)^* = B^* A^*$
- $A^{**} = A$

Y esta involución es contínua en norma como tenemos $\|A\| = \|A^*\|$.

Para decirlo de otra manera, $\mathcal{B}(H)$ con la norma $\|.\|$ y la involución * es una *-álgebra de Banach y verifica además la condición C^*, es decir,

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \tag{6.45}$$

Como tenemos

1. $\|A^*A\| \leq \|A^*\| \ \|A\| = \|A\|^2$
2. $\|Af\|^2 =< Af|Af >=< f|A^*Af >\leq \|A^*A\| \ \|f\|^2$

Es decir $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$ por la definición de la norma. Traducimos esta última propiedad diciendo que $\mathcal{B}(H)$ es una C^* álgebra. Nótese que la C^*-álgebra tienen aplicación espectacular en mecánica estadística.

Con la noción de adjunto, podemos definir varias clases interesantes de operadores acotados:

- A autoadjunto si $A^* = A$
- A anti-autoadjunto si $A^* = -A \Leftrightarrow A = iB, B = B^*$
- A proyector ortogonal si $A^2 = A = A^*$
- A unitario si $A^*A = AA^* = I$
- A normal si $A^*A = AA^* \Leftrightarrow A = B + iC, C = C^*, B = B^*, [B, C] = 0$.

6.3 Representaciones matriciales de los operadores acotados.

Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de H. Esta elección de una base ortonormal va a inducir un isomorfismo entre H y l^2, definido de la siguiente manera:

$$f \in H : f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n \Leftrightarrow (c_n) \in l^2 \tag{6.46}$$

Sobre esto isomorfismo, un operador $A \in \mathcal{B}(H)$ es representado por una matriz infinita:

$$Ae_n = \sum_k a_{kn} e_k \tag{6.47}$$

donde

$$a_{kn} =< e_k|Ae_n > \tag{6.48}$$

Entonces, tenemos

$$f \sim (c_n) \Rightarrow Af \sim (d_n) \text{ donde } d_n = \sum_k a_{nk} c_k \tag{6.49}$$

El operador A es entonces representado por la matriz infinita $\mathcal{A} \equiv (a_{nk})$. Su adjunto es representado por la matriz adjunta $\mathcal{A}^{\dagger} = (\overline{a}_{kn})$. Pero, el manejo de matriz infinita es muy difícil y poco útil. El único caso interesante es el caso de matrices diagonales:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & a_2 & 0 & .. \\ 0 & 0 & a_3 & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ae_k = a_k e_k \tag{6.50}$$

tenemos las propiedades siguientes:

- $A \sim diag(a_k) \Leftrightarrow A^* \sim diag(\overline{a}_k)$
- A autoadjunto $\Leftrightarrow a_k$ reales
- A anti-autoadjunto $\Leftrightarrow a_k$ imaginarios
- A proyector ortogonal $\Leftrightarrow a_k = 0, 1 \forall k$
- A unitario $\Leftrightarrow |a_k| = 1 \forall k$.

6.4 Proyectores ortogonales

Un proyector ortogonal es un operador $P \in \mathcal{B}(H)$ t.q.

$$P^2 = P = P^* \tag{6.51}$$

La condición $P^2 = P$ puede escribirse como $P(I - P) = 0$.

El teorema muy importante sobre los proyectores ortogonales es el teorema que relaciona cada sub-espacio de hilbert de H a un proyector ortogonal.

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, cada sub-espacio hilbertiano de H va a definir un proyector ortogonal único e inversamente.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea F, un sub-espacio hilbertiano de H, tenemos entonces

$$H = F + F^{\perp} \tag{6.52}$$

es decir que cualquier $f \in H$, podemos escribirlo como

$$f = f_F + f_{F^{\perp}} \tag{6.53}$$

tal que $< f_F | f_{F^{\perp}} >= 0$ y entonces, tenemos por el teorema de Pytágoras,

$$\|f\|^2 = \|f_F\|^2 + \|f_{F^{\perp}}\|^2 \tag{6.54}$$

Vamos a definir el operador P_F de la siguiente manera:

$$P_F f = f_F$$

éste es un proyector ortogonal que proyecta H sobre F. Es fácil comprobarlo, sólo tenemos que verificar los dos propiedades:

- $P_F^2 f = P_f f_F = f_F$
- $P_F^* = P_F$:

$$\begin{aligned} < g|P_F f > &= < g_F + g_{F^\perp}|f_F > \\ &= < g_F|f_F > \\ &= < g_F|f_F + f_{F^\perp} > \\ &= < P_F g|f > \end{aligned}$$

Además, tenemos $\|P_F\| = 1$ por que tenemos

$$\|P_F f\| \leq \|f\| \tag{6.55}$$

$$\|P_F f_F\| = \|f_F\| \tag{6.56}$$

donde la primera desigualdad resulta del teorema de Pytágoras.

($\Leftarrow$) Sea un proyector ortogonal P, podemos escribir $\forall f \in H$,

$$f = Pf + (I - P)f \tag{6.57}$$

es decir

$$H = PH + (I - P)H \tag{6.58}$$

En hecho, tenemos $< Pf|(I - P)f >= 0$ y $I - P$ es también un proyector ortogonal. Entonces, el subespacio PH es cerrado porque es el núcleo de un operador acotado $(I - P)$:

$$PH = Ker(I - P) \tag{6.59}$$

$$(I - P)H = Ker(P) \tag{6.60}$$

$\Rightarrow PH$ y $(I - P)H$ son sub-espacio hilbertianos.

Llamamos Proj(H) el conjunto de todos los proyectores ortogonales. Este espacio es en biyección con el conjunto de sub-espacio hilbertiano de H por la relación $P \Leftrightarrow M = PH$ y llamamos **rango** de P, la dimensión de $M = PH$.

Las propiedades siguientes son inmediatas:

- $O, I \in$Proj(H)
- $P \in$Proj$(H) \Leftrightarrow (I - P) \in$Proj$(H)$
- $P_1P_2 = 0 \Leftrightarrow M_1 \perp M_2$
- $P_1P_2 \in$Proj$(H) \Leftrightarrow P_1P_2 = P_2P_1$
  Entonces, $P = P_1P_2$ es un proyector sobre $M = M_1 \cap M_2$
- $P_1 + P_2 \in$Proj$(H) \Leftrightarrow P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ es decir si $M_1 \perp M_2$
  Entonces, $P_1 + P_2$ es un proyector sobre $M_1 \oplus M_2$
- $P_1P_2 = P_1 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2$

Esta última propiedad va a dar a Proj(H) una estructura de orden

$$P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \tag{6.61}$$

6.4.1 Ejemplos:

Todos los ejemplos de decomposición ortogonales que vimos anterioramente pueden reformularse en término de proyectores.

Más generalmente, sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de H. Entonces, tenemos

- $P_n = |e_n >< e_n|$ definido por $P_n f =< e_n|f > e_n$ es un proyector de rango uno sobre el subespacio $[e_n]$ de dimensión 1.

- Como $< e_1|e_2 >= 0$, tenemos $P_1P_2 = 0$ y entonces, $P_1 + P_2 = |e_1 >< e_1| + |e_2 >< e_2|$ es un proyector de rango dos sobre el subespacio $[e_1e_2]$ de dimensión dos.

- De la misma manera, tenemos que

$$P = \sum_{j=1}^{N} |e_j >< e_j| \tag{6.62}$$

  es el proyector de rango N sobre el sub-espacio $[e_1..e_N]$.

- El hecho que $\{e_n\}$ es una base ortonormal va a traducirse por la relación de Cerradura de Dirac:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |e_j >< e_j| = I \tag{6.63}$$

  donde la suma infinita se toma en el siguiente sentido

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} |e_j >< e_j|f >= f \ \forall f \in H \tag{6.64}$$

  Esta relación de cerradura de Dirac es la base de la notación automática de Dirac usada muy frecuentamente por los físicos. Así la representación matricial de un operador acotado A se escribe

$$A = \sum_n \sum_k |e_n >< e_n|Ae_k >< e_k| \tag{6.65}$$

  es decir

$$Af = \sum_n \sum_k < e_n|Ae_k >< e_k|f > e_n \tag{6.66}$$

  Por más simetria, Dirac usa tambien la notación siguiente:

$$< e_n|A|e_k >=< e_n|Ae_k >=< A^* e_n|e_k > \tag{6.67}$$

6.4.2 Ejemplo concreto:

Sea $H = L^2(S^2)$ con la base de las armónicas esféricas (base ortonormal)

$$H = L^2(S^2) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} H_l \tag{6.68}$$

donde

$$\begin{aligned} H_l &= \left[Y_l^{-l}...Y_l^l\right] && (6.69) \\ \dim H_l &= 2l+1 && (6.70) \end{aligned}$$

El proyector sobre H_l se escribe entonces como

$$P_l = \sum_{m=-l}^{l} |Y_l^m >< Y_l^m| \tag{6.71}$$

es decir que

$$\begin{aligned} (P_l f)(\theta, \varphi) &= \sum_{m=-l}^{l} < Y_l^m | f > Y_l^m(\theta, \varphi) && (6.72) \\ &= \sum_{m=-l}^{l} \left(\int \int d\Omega \overline{Y_l^m(\theta', \varphi')} f(\theta', \varphi') \right) Y_l^m(\theta, \varphi) && (6.73) \end{aligned}$$

Otro ejemplo concreto: las funciones de Hermite $\varphi_n(x)$

$$L^2(R, dx) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n \tag{6.74}$$

donde

$$\begin{aligned} H_n &= [\varphi_n(x)] && (6.75) \\ \dim H_n &= 1 && (6.76) \end{aligned}$$

Entonces, $P_n = |\varphi_n >< \varphi_n|$ es el proyector sobre el nivel n del oscilator armónico.

El átomo de hidrógeno (ver notas de met. mat. II):

$$P_n = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} |\Psi_{nlm} >< \Psi_{nlm}| \tag{6.77}$$

El rango de P_n es igual a n^2.

6.5 Operadores unitarios e isométricos

6.5.1 Operadores unitarios

Un operador lineal $U : H_1 \to H_2$, con $H_{1,2}$ espacios de Hilbert, es llamado **unitario** si verifica las dos siguientes condiciones que son independientes en dimensión infinita:

$$U^*U = I_{H_1} \tag{6.78}$$
$$UU^* = I_{H_2} \tag{6.79}$$

Esas dos relaciones implican que $U : H_1 \to H_2$ y $U^* : H_2 \to H_1$ son biyecciones continuas, $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $U^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, y son equivalentes a las dos relaciones:

$$f_1, g_1 \in H_1 :< Uf_1|Ug_1 >_{H_2} = < f_1|g_1 >_{H_1} \tag{6.80}$$
$$f_2, g_2 \in H_2 :< U^*f_2|U^*g_2 >_{H_1} = < f_2|g_2 >_{H_2} \tag{6.81}$$

Eso significa que los operadores unitarios son isomorfismos entre espacios de Hilbert.

Ejemplos:

1. el isomorfismo entre $H \to l^2$ definido por la selección de una base ortonormal $\{e_n\} \in H$:
$$U : f \to (c_n)$$
con $f = \sum_n c_n e_n$.

2. Operador de Fourier $F : L^2(R, dx) \to L^2(R, dk)$. Su carácter unitario es el contenido del teorema de Plancherel (ver notas de cursos de met. mat. II).

6.5.2 Isometrías

Un operador lineal $V : H_1 \to H_2$ se llamo **isometrí a** si verifica la siguiente relación:
$$\|Vf_1\|_{H_2} = \|f_1\|_{H_1} \quad \forall f_1 \in H_1 \tag{6.82}$$

lo que implica que $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Esta relación es equivalente a

$$V^*V = I_{H_1} \tag{6.83}$$

Pero el operador $P = VV^*$ es solamente un proyector ortogonal ($P^* = P = P^2$). Podemos ver fácilmente que una isometría es unitaria si su operador adjunto es también una isometría.

Ejemplos:

En $H_1 = l^2 = H_2$, el operador "shift" es definido por

$$Ve_n = e_{n+1} \quad n = 1, 2, ...$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .. \\ 1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 1 & 0 & .. \\ .. & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificamos fácilmente que

$$\begin{aligned} V^* &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 1 & .. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ .. & .. & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ VH_1 &= N = [e_2 e_{3...}] \\ KerV^* &= [e_1] \\ V^*V &= I \\ VV^* &= P_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 1 & .. \\ .. & .. & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{[e_2 e_{3...}]} \end{aligned}$$

6.5.3 Isometrías parciales

Un operador $W : H_1 \rightarrow H_2$ es llamado **isometría parcial** si existen dos proyectores ortogonales P_M $\in$Proj(H_1) y P_N $\in$Proj(H_2) tal que

$$W^*W = P_M \tag{6.84}$$
$$WW^* = P_N \tag{6.85}$$

Entonces, tenemos $N = WH_1$ y $M = W^*H_2$, los dos subespacios hilbertianos respectivamente de H_2 y H_1.

Ejemplos:

En $H_1 = H_2 = l^2$, el operador W es definido por

$$\begin{aligned} We_1 &= 0 \\ We_n &= e_{n+1} \quad n = 2, 3, ... \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
W &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \\
W^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V^* \end{bmatrix} \\
W^*W &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V^*V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = P_{[e_2 e_3 \ldots]} = P_M \\
WW^* &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & VV^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = P_{[e_3, e_4 ..]} = P_N
\end{aligned}$$

Teorema de decomposición polar.

Cualquier operador acotado $A \in \mathcal{B}(H)$ puede escribirse univocamente sobre la forma $A = W\,|A|$ donde W es una isometría parcial y $|A| \equiv (A^*A)^{1/2}$ es un operador autoadjunto positivo. Positivo significa que $\forall f \in H$

$$< f|\,|A|\,f > \geq 0$$

Esta propiedad generaliza la decomposición polar usual de los numeros complejos:

$$\begin{aligned}
z &= e^{i\varphi}\,|z| \\
|z| &= (\overline{z}z)^{1/2}
\end{aligned}$$

Ejemplo:

Sea $A = |f >< g|$ un operador de rango uno definido por $Ah =< g|h > f$. Vamos a suponer que los vectores f, g son normalizados $(\|f\| = \|g\| = 1)$. Asi tenemos

- $A^* = |g >< f|$
- $A^*A = |g >< g| = P_g = P_g^2$
- $AA^* = |f >< f| = P_f = P_f^2$
- $|A| = (A^*A)^{1/2} = P_g$
- $|A^*| = (AA^*)^{1/2} = P_f$

$\Rightarrow A = U\,|A|$ con

$$\begin{aligned}
Ug &= f \\
Uh &= 0
\end{aligned}$$

para $h \in [g]^{\perp}$

$\Rightarrow A^* = U^* |A^*|$ con

$$\begin{aligned} U^* f &= g \\ U^* h &= 0 \end{aligned}$$

para $h \in [f]^{\perp}$

Este ejemplo puede extenderse al caso de un operador de rango n y de imagen $[f_1 ... f_n]$:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{n} |f_i >< g_i| \\ A^* &= \sum_{j=1}^{n} |g_i >< f_i| \end{aligned}$$

Si pasamos al límite $n \to \infty$, vamos a llegar a la clase de operadores compactos que vamos a estudiar en la próxima sección.

6.6 Operadores compactos

Hasta ahora, hemos estudiado el espacio de Hilbert con la topología de la norma (topología fuerte). Así, tenemos

- convergencia fuerte: $f_n \to f \Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0$
- convergencia débil :$f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow < g|f_n - f > \to 0 \ \forall g \in H$.

La topología débil es estrictamente más débil que la topología fuerte. Cualquier sucesión fuertemente convergente es débilmente convergente por la desigualdad de Schwarz:

$$|< g|f_n - f >| \leq \|g\| \quad \|f_n - f\| \to 0$$

El inverso no es cierto. Por ejemplo, sea $\{e_n\}$ una base ortonormal, tenemos

$$e_n \rightharpoonup 0$$

por que $< f|e_n > \to 0 \ \forall f \in H$ como

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< f|e_n >|^2 < \infty$$

Pero $e_n \nrightarrow 0$, por que $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ y entonces la sucesión $\{e_n\}$ nos es de Cauchy en norma y no puede converger fuertemente. La relación exacta entre esas dos nociones de convergencia es la siguiente:

Teorema 1:

$$f_n \to f \Leftrightarrow \begin{cases} f_n \rightharpoonup f \\ \|f_n\| \to \|f\| \end{cases}$$

La demostración es inmediata.

La propiedad esencial de la convergencia débil es dada en la proposición siguiente:

Proposición 1:

1. *Cada sucesión débilmente convergente es acotada, eso significa que*

$$f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ t.q. } \|f_n\| \leq c, \forall n$$

2. *Cada sucesión acotada contiene una sub-sucesión débilmente convergente:*

$$\|f_n\| \leq c \Rightarrow \exists \left\{f_{n_j}\right\} \subset \{f_n\} \text{ tal que } f_{n_j} \rightharpoonup f$$

   Este último resultado puede expresarse de la siguiente manera: cada bola$=$ $\{f$ tal que (t.q.) $\|f_n\| \leq c\}$ es compacta en la topología débil.

Un operador lineal A sobre un espacio de Hilbert H es dicho **compacto** si A transforma cualquier sucesión débilmente convergente en una sucesión fuertemente convergente:

$$f_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow Af_n \rightarrow 0$$

Los operadores compactos son los operadores que se acercan más a los operadores en dimensiones finitas y son muy importante en las aplicaciones. Las propiedades del conjunto de los operadores compactos sobre H (se nota $\mathcal{C}(H)$) se dividen en dos categorías: propiedades de $\mathcal{C}(H)$ como sub-espacio de $\mathcal{B}(H)$ y las propiedades de aproximación de operadores compactos por operadores de rango finito.

Teorema 2:

$\mathcal{C}(H)$ es un ideal bilateral cerrado de $\mathcal{B}(H)$. Eso significa:

1. A compacto $\Rightarrow A$ acotado
2. $\{A_n\} \in \mathcal{C}(H), \|A_n - A\| \rightarrow 0 \Rightarrow A \in \mathcal{C}(H)$, es decir que $\mathcal{C}(H)$ es cerrado.
3. A, B compactos $\Rightarrow A + aB$ compacto
4. A compacto $\Leftrightarrow A^*$ compacto, es decir que $\mathcal{C}(H)$ es un sub-espacio estable sobre la involución, lo que significa que $0 \in \mathcal{C}(H)$
5. A compacto, B acotado $\Rightarrow AB$ y BA compactos, es decir que $\mathcal{C}(H)$ es un ideal bilatero de $\mathcal{B}(H)$

Las dos propiedades siguientes son sencillas a demostrar:

- $I \in \mathcal{C}(H) \Leftrightarrow \dim H < \infty$
- A compacto $\Leftrightarrow Ae_n \rightarrow 0\ \forall$ base ortonormal $\{e_n\} \Leftrightarrow < e_n|Ae_n > \rightarrow 0 \quad \forall$ base ortonormal $\{e_n\}$

Vamos a decir que A_N es de rango $N < \infty$ si $\dim A_N H = N$ y A_N se llama operador de rango finito. Eso es equivalente a cada de las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} A_N \text{ de rango } N \quad &\Leftrightarrow \quad A_N^* \text{ de rango } N \\ &\Leftrightarrow \quad A_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n >< g_n| \lambda_n \end{aligned}$$

donde $\{f_n\}, \{g_n\}$ son familias ortonormales y $f_n \in A_N H$ y $g_n \in A_N^* H$.

En particular, un operador autoadjunto de rango N se escribe como

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n >< f_n| \lambda_n$$

con λ_n real.

Teorema 3:

Un operador A es compacto ssi A es límite en norma de una sucesión de operadores de rango finito.

Mostramos sucesivamente:

1. A de rango 1 implica que A compacto.

$$A = |h >< g|, \text{si } f_n \rightharpoonup 0, Af_n =< g|f_n > h \to 0$$

2. A de rango finito implica A compacto: A es una suma de operador de rango 1, entonces compactos y entonces A es compacto por el teorema anterior.

3. $A = \lim_n A_n$ con A_n de rango finito $\Rightarrow$ A compacto por que el conjunto de op. compactos es cerrado.

4. Inversamente, $A \in \mathcal{C}(H) \Rightarrow \exists \{A_n\}$ de rango finito t.q $A_n \to A$ (esta es la parte no-trivial de la demostración)

Cualquier operador autoadjunto compacto puede escribirse como

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |e_n >< e_n|$$

así que va a resultar del teorema espectral. Más generalmente cualquier operador compacto puede escribirse como

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |g_n >< f_n|$$

con $\lambda_n \to 0$, y $\{f_n\}, \{g_n\}$ son bases ortonormales. Para tal operador, tenemos

$$\begin{aligned} A^*A &= \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \, |f_n >< f_n| \\ |A| &= (A^*A)^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \, |f_n >< f_n| \end{aligned}$$

A partir de esas dos propiedades podemos definir varias clases interesantes de operadores compactos.

6.6.1 Operadores nucleares o a traza

Definición: A nuclear o a traza $\Leftrightarrow \sum_1^{\infty} |\lambda_n| < \infty$.

El origen de esta denominación es la siguiente: para un operador A acotado y positivo, llamamos l**a traza de** A, el número positivo, finito o no tal que

$$TrA = \sum_1^{\infty} < e_n | A e_n >$$

donde $\{e_n\}$ es una base ortonormal. Esta noción generaliza la definición de traza de una matríz. En el caso del operador $|A|$, tenemos

$$Tr\,|A| = \sum_1^{\infty} |\lambda_n|$$

Un operador a traza es entonces un operador tal que el valor absoluto $|A|$ tiene una traza finita. Notamos que $\mathcal{C}^1(H)$ el conjunto de los operadores nucleares.

6.6.2 Operadores de Hilbert-Schmidt

Definición:A de Hilbert-Schmidt$\Leftrightarrow TrA^*A = \sum_1^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

Notamos $\mathcal{C}^2(H)$ el conjunto de los operadores de Hilbert-Schmidt.

6.6.3 Operadores de clase $\mathbf{C}^p$

Para $1 \leq p < \infty$, definimos de misma manera:

$$A \text{ de clase } C^p \Leftrightarrow Tr(A^*A)^{p/2} = \sum_1^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty$$

Para $p = 1$, encontramos los operadores nucleares.

Para $p = 2$, encontramos los operadores de Hilbert-Schmidt. Notamos $C^f(H)$ el conjunto de operadores de rango finito.

Teorema 4:

1. $C^f(H) \subset \mathcal{C}^1(H) \subset \mathcal{C}^2(H)... \subset \mathcal{C}(H) \subset \mathcal{B}(H)$
2. $C^f, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2..\mathcal{C}$ son ideales bilateraless de $\mathcal{B}(H)$ pero solamente $\mathcal{C}(H)$ es cerrado. Los otros son densos en $\mathcal{C}(H)$.
3. $A \in \mathcal{C}^1(H) \Leftrightarrow A = BC$ con $B, C \in \mathcal{C}^2(H)$

6.6.4 Aplicaciones

- $\mathcal{C}(H)$ es la clase de operadores en cual se aplica la teoría de Fredholm de las ecuaciones integrales.
- $\mathcal{C}^2(H)$ en el caso de $H = L^2([a,b], dx)$ es fácil de reconocer si un operador es de Hilbert-Schmidt, pero no si es compacto. En tal caso un operador de HS es un operador integral, es decir, dado por un nucleo $k(x,y)$:

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

$$K \text{ op. de HS} \Leftrightarrow \int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \, dxdy < \infty$$

  Eso explica por qué en la práctica vamos a aplicar la teoría de las ecuaciones integrales a los operadores de HS (en lugar de aplicarlos a los op. compactos).

- $\mathcal{C}^1(H)$: los operadores a traza son esenciales en mecánica cuántica por que el operador densidad ρ que describe una mezcla de estados es positivo, a traza y de traza igual a 1.

$$\rho \text{ op. de densidad} \Leftrightarrow \rho > 0, \rho \in \mathcal{C}^1(H), Tr\rho = 1$$

  Usamos la propiedad de ideal bilateral de $\mathcal{C}^1(H)$ en la definición de los valores medianos

$$< A >_\rho = Tr\rho A$$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{B}(H) \\ \rho \in \mathcal{C}^1(H) \end{array}\right\} \Rightarrow \rho A \in \mathcal{C}^1(H)$$

6.7 Operadores no-acotados

Por operadores no acotado, el dominio no puede ser tomado como el espacio entero. Para definir tal operador no-acotado T tenemos que especificar su dominio $D(T)$ y el acción de T sobre los vectores de este dominio.

Tenemos las siguientes definiciones:

- $T_1 \supset T_2 : T_1$ es una **extension de** T_2 o T_2 es una **restricción de** T_1 si
  1. $D(T_1) \supset D(T_2)$

2. $T_1 f = T_2 f, \forall f \in D(T_2)$

- $T_1 = T_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D(T_1) = D(T_2) \\ T_1 f = T_2 f \quad \forall f \in D(T_1) \end{cases}$

- El operador T se dice **"cerrable"** si tenemos

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leftarrow f_n \in D(T) \\ T f_n \to g \end{array}\right\} \Rightarrow g = 0$$

- Sea T un operador cerrable, vamos a llamar **la cerradura de T, el operador $\widetilde{T}$** definido de la siguiente manera:

$$D(\widetilde{T}) = \{f | \exists (f_n) \in D(T) \text{ t.q.} f_n \to f \text{ y } T f_n \text{ converge}\}$$

$$\forall f \in D(\widetilde{T}), f = \lim_n f_n \quad \widetilde{T} f = \lim_n T f_n$$

En el caso acotado, $f_n \to f$ implica automáticamente que $T f_n$ converge, pero no en general!

- T se dice **cerrado** si $T = \widetilde{T}$

- Si T es cerrado, llamamos **el corazón de** T, cualquier sub-espacio $D \subset D(T)$ tal que $T = \widetilde{T \upharpoonright D}$.

- T no acotado, de dominio denso $D(T)$. Su adjunto es el operador T^* definido de la siguiente manera:

  1. $g \in D(T^*)$ si $\exists h \in H$ tal que $< g|Tf >=< h|f > \forall f \in D(T)$, es decir
  $$|< g|Tf >| \leq c \, \|f\|$$

  2. para $g \in D(T^*)$, $T^* g = h$

Podemos escribir
$$< g|Tf >=< T^* g|f >$$
para $\forall f \in D(T)$ y $\forall g \in D(T^*)$. Como $D(T)$ es denso, el operador T^* es univocamente definido por esta relación. Vemos fácilmente que T^* es siempre cerrado pero su dominio no es necesariamente denso.

Propiedades:

1. $T^* = (\widetilde{T})^*$

2. $T_1 \subset T_2$ con $D(T_1)$ denso $\Rightarrow T_1^* \supset T_2^*$

3. Sea T "cerrable" y $D(T)$ denso, entonces, $D(T^*)$ es denso y $T^{**} = \widetilde{T}$

6.7.1 Operadores simétricos.

Un operador Tes llamado simétrico o hermitiano si $D(T)$ es denso y si $T \subset T^*$, es decir

$$< f|Tg > = < Tf|g > \quad \forall f \in D(T)$$

Un operador simétrico es entonces siempre cerrable y $T^{**} = \widetilde{T}$ es también simétrico:

$$T^{**} \subset T^{***} = T^*$$

Un operador T es dicho autoadjunto si $T = T^*$, lo que implica que $D(T) = D(T^*)$ y es dicho esencialemente autoadjunto si $\widetilde{T}$ es autoadjunto. Así tenemos 4 situaciones posibles:

$$\begin{aligned}
T \text{ simetrico} \quad &\Leftrightarrow \quad T \subset T^{**} \subset T^* \\
T \text{ simetrico cerrado} \quad &\Leftrightarrow \quad T = T^{**} \subset T^* \\
T \text{ esencialemente autoadjunto} \quad &\Leftrightarrow \quad T \subset T^{**} = T^* \\
T \text{ autoadjunto} \quad &\Leftrightarrow \quad T = T^{**} = T^*
\end{aligned}$$

Para las aplicaciones, son los operadores autoadjuntos que tienen el papel más importante. En particular, son los únicos operadores simétricos que verifican el teorema espectral que vamos a estudiar en el próximo capítulo. Esas consideraciones se aplican en particular a la mecánica cuantica donde postulamos que las cantidades observables son representados por operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert de los estados. Eso garantiza una teoría adecuada de la medida cuántica por el teorema espectral, y una evolución temporal correcta que conserva la probabilidad. De las observables más importantes es el hamiltoniano: el primer trabajo en un problema cuántico consistirá en verificar que el hamiltoniano del sistema es un operador autoadjunto.

Capitulo 7

Teoría espectral de los operadores en el espacio de Hilbert

7.1 Generalidades

En la mayoría de las aplicaciones (mecánica cuántica, frecuencias propias de vibración, ecuaciones elípticas,...), tenemos que "diagonalizar" un operador. Por ejemplo, las ecuaciones de los polinomios ortogonales de Legendre, Laguerre y Hermite estudiados anteriormente son todas ecuaciones con valores propios del siguiente tipo:

$$Af = \lambda f \tag{7.1}$$

y el problema consistio a encontrar los valores propios λ para los cuales esta ecuación tiene soluciones perteneciendo al espacio de Hilbert considerado, es decir los vectores propios. A este problema lo vamos a tratar con toda generalidad en este capítulo.

En dimensión finita N, el problema es equivalente a "diagonalizar" una matriz hermitiana A, es decir a encontrar sus valores propios $\lambda_1..\lambda_N$ y los vectores propios correspondientes $f_1..f_N$. Esos vectores propios forman una base de C^N y en este base, la matriz A es diagonal. Los valores propios se obtienen como solución de la siguiente ecuación

$$\det\left[A - \lambda I\right] = 0 \tag{7.2}$$

En dimensión infinita, esta condición no puede aplicarse y necesitamos encontrar un método diferente. Primero, vamos a demostrar dos propiedades muy sencillas pero muy importante.

$\boxed{\underline{\text{Propiedad 1:}}}$

Sea $A \subseteq A^*$, un operador simétrico, entonces tenemos

1. *sus valores propios eventuales son reales.*

2. *sus vectores propios con valores propios diferentes son ortogonales.*

Demostración:
(1) $\forall f \in D(A), \quad \overline{\lambda} \|f\|^2 =< Af|f >=< f|Af >= \lambda \|f\|^2$
(2) Sea $Af = \lambda f$, $Ag = \mu g$. Entonces, tenemos

$$\lambda < f|g >=< Af|g >=< f|Ag >= \mu < f|g >$$

y entonces, si $\lambda \neq \mu \Rightarrow < f|g >= 0$.

La propiedad (2) es válida para un operador normal T que cumple con $TT^* = T^*T$, en este caso, tenemos $Tf = \lambda f \Leftrightarrow T^*f = \overline{\lambda} f$. Desafortunadamente, esta propiedad no nos ayuda mucho para encontrar los valores y vectores propios por que un operador simétrico puede no tener valores propios. Por ejemplo, el operador de multiplicación por x en $H = L^2([0,1], dx)$, no existe ningún elemento no-cero $f \in H$ tal que

$$xf(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

Entonces, los valores propios no son suficientes para caracterizar un operador autoadjunto, necesitamos otro método. Sea λ un valor propio de $A = A^*$,

$$(A - \lambda I)f = 0$$

con $f \neq 0$. El operador $(A - \lambda I)$ no es inyectivo y entonces no es invertible. El inverso de un operador inyectivo B se defino de la siguiente manera:

- $0 \neq f \in D(B) \Rightarrow Bf = g \neq 0$
- $D(B^{-1}) = Ran(B)$ y $B^{-1}g = f$, donde $Ran(B)$ =Imagen de $B = \{Bf | f \in D(B)\}$

Podemos notar que en el caso finito, la relación (7.2) significa exactemente que el operador $(A - \lambda I)$ no es invertible. Esto va a motivar las definiciones siguientes:

- Sea A un operador cerrado, llamamos el **conjunto resolvente de** A, el conjunto $\rho(A)$ definido como

  $$\rho(A) = \left\{ z \in C \quad | (A - zI) \text{ es inyectivo y } (A - zI)^{-1} \in \mathcal{B}(H) \right\} \tag{7.3}$$

  Se puede demonstrar que $\rho(A)$ es siempre un conjunto abierto en C. El operador $(A - zI)^{-1}$ es llamado **el resolvente de** A.

- El complementario del conjunto resolvente es

  $$\sigma(A) = C \setminus \rho(A) \tag{7.4}$$

  y se llama el **espectro de** A. Y entonces, es siempre un conjunto cerrado de C.

- Cada valor propio de A pertenece al espectro de A pero el inverso no es verdadero en general. Dos casos pueden presentarse:

  1. Límite de valores propios:
     Sea una base ortonormal $\{e_n\}$, el operador autoadjunto diagonal :

     $$Ae_n = \frac{1}{n}e_n \quad n = 1, 2, ...$$

     Entonces, $\sigma(A) = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, ...\} \cup \{0\}$. Eso se puede verificar muy fácilmente, el operador inverso A^{-1} es el operador diagonal

     $$A^{-1}e_n = ne_n$$

     y A^{-1} no es acotado, entonces $0 \notin \rho(A)$ y $0 \in \sigma(A)$ pero el punto 0 no es valor propio, sin embargo es el límite de una sucesión de valores propios y pertenece entonces al espectro de A que es cerrado.

  2. Espectro continuo:
     Por eso, vamos a estudiar de nuevo el operador de multiplicación por x en $H = L^2([0, 1], dx)$. Su resolvente es el operador de multiplicación por $(x - \lambda)^{-1}$. Pero, tenemos

     – si $\lambda \notin [0, 1]$, $\exists\delta > 0$ tal que $|x - \lambda| \geq \delta$ como $x \in [0, 1]$. Entonces, el resolvente de x es acotado por $1/\delta$. Y entonces, $\lambda \in \rho(x)$.
     – si $0 \leq \lambda \leq 1$, λ no es un valor propio y entonces el resolvente $(x - \lambda)^{-1}$existe pero no es acotado. Entonces, $\lambda \in \sigma(x)$. Y tenemos que

     $$\sigma(x) = [0, 1]$$

- De la misma manera, el operador de multiplicación M_g por $g(x) = \frac{3}{1+x^2}$ en $H = L^2(R, dx)$ no tiene ningún valor propio pero su espectro es igual a $\sigma(M_g) = [0, 3] = \overline{\{g(x)|x \in R\}}$. El espectro tiene que ser cerrado. Podemos ver fácilmente que el resolvente de M_g es el operador de multiplicación por $(g(x) - \lambda)^{-1}$ y que es acotado para $\lambda < 0$ o $\lambda > 3$. Un tal espectro se llamo **espectro puramente continuo.**

- De manera general, el especto de un operador autoadjunto A va a descomponerse en dos partes (no necesariamente disjuntas):

  $$\sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} \cup \sigma_c(A) \tag{7.5}$$

  donde vamos a llamar:

  $\sigma_p(A)$ = espectro puntual ={valores propios}

  $\sigma_c(A)$ = espectro continuo= $\sigma(A) \setminus \overline{\sigma_p(A)}$

Tenemos entonces las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda &\in \rho(A) \Leftrightarrow (A-\lambda I)^{-1} \text{ existe y es acotado} && (7.6)\\ \lambda &\in \sigma_p(A) \Leftrightarrow (A-\lambda I)^{-1} \text{ no existe} && (7.7)\\ \lambda &\in \sigma(A)\setminus\sigma_p(A) \Leftrightarrow (A-\lambda I)^{-1} \text{ existe pero no es acotado} && (7.8) \end{aligned}$$

En la última categoría, encontramos todos los puntos límites del espectro puntual y los puntos del espectro contínuo que no pertenecen al espectro puntual.

Por un operador autoadjunto A, el problema ahora consiste en caracterizar las diferentes partes de su espectro.

Propiedad 2:

S*ea* A *un operador autoadjunto acotado, entonces*

$$\sigma(A) \in R \tag{7.9}$$

Demostración:
Sea $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \lambda_2 \neq 0$, tenemos para cualquier $f \in H$

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda I)f\|^2 &= \|(A-\lambda_1 I)f\|^2 + |\lambda_2|^2\|f\|^2 && (7.10)\\ &\geq |\lambda_2|^2\|f\|^2 && (7.11) \end{aligned}$$

De la misma manera, tenemos

$$\left\|(A-\overline{\lambda}I)f\right\|^2 \geq |\lambda_2|^2\|f\|^2 \tag{7.12}$$

Vamos a probar que $A-\lambda I$ es biyectivo. Es inyectivo por (7.11) y también es suryectivo, es decir que $Ran(A-\lambda I) = H$ por que tenemos

1. $Ran(A-\lambda I)$ es cerrado. Sea $\{f_n\}$ tal que $(A-\lambda I)f_n \to g$. La sucesión $\{f_n\}$ converge por que tenemos

   $$\|(A-\lambda I)(f_n - f_m)\| \geq |\lambda_2| \quad \|f_n - f_m\|$$

   es decir que $\{f_n\}$ es de Cauchy y entonces $f_n \to f$. En virtud de la continuidad de $(A-\lambda I)$, tenemos $(A-\lambda I)f = g$, es decir que $g \in Ran(A-\lambda I)$

2. $[Ran(A-\lambda I)]^\perp = \{0\}$. Sea $g \perp Ran(A-\lambda I)$ es decir $\forall f$, tenemos

   $$\begin{aligned} 0 &=< g|(A-\lambda I)f >\\ &=< (A-\overline{\lambda}I)g|f >\\ &\Rightarrow (A-\overline{\lambda}I)g = 0 \end{aligned}$$

   Y entonces, por (7.12), $g = 0$.

Finalmente, el resolvente $(A - \lambda I)^{-1}$ que existe y es bien definido en todo H, es acotado por (7.11),

$$(A - \lambda I)f = g \Leftrightarrow f = (A - \lambda I)^{-1} g$$

es decir que (7.11) significa

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1} g\right\| \leq \frac{1}{|\lambda_2|} \|g\|$$

Y entonces, si $\lambda_2 \neq 0$, el espectro de A es $\{0\}$. Entonces si A tiene un espectro diferente de $\{0\}$, eso significa que su espectro tiene que ser real.

Podemos demostrar de la misma manera la siguiente propiedad:

Propiedad 3:

Sea A autoadjunto y acotado y $\lambda \in R$. Si existe un $m > 0$ tal que $\|(A - \lambda I)f\| \geq m \|f\|, \forall f \in H$, entonces $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, es decir $\lambda \in \rho(A)$.

En conclusión, si $\lambda \in \sigma(A)$, existe una sucesión $\{f_n\}$ tal qe $\|f_n\| = 1$ y$\|(A - \lambda I)f_n\| \to 0$. Usaremos esta propiedad en la próxima sección.

7.2 Teoría espectral de los operadores autoadjuntos compactos

Vamos a empezar el estudio general de la teoria espectral para el caso más sencillo, el caso de los operadores compactos.

Teorema 1:

Sea A compacto autoadjunto y $\lambda \neq 0$. Entonces, o el valor λ es valor propio de A o $\lambda \in \rho(A)$.

Eso significa que $\sigma_c(A) = \emptyset$.

Demostración:

Suponemos $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$ y vamos a enseñar que existe un elemento $f \in H$ tal que $Af = \lambda f$. Por la nota del fin de la sección anterior, existe una sucesión $\{f_n\}$ tal que $\|f_n\| = 1$ y $(A - \lambda I)f_n \to 0$. La sucesión $\{f_n\}$ como es acotada, contiene una sub-sucesión $\{f_n^{'}\}$ débilmente convergente : $f_n^{'} \rightharpoonup f$. Como A es compacto, tenemos que $Af_n^{'} \to Af_n$ y eso ímplica que la sucesión $\{f_n^{'}\}$ va a converger fuertamente por que tenemos

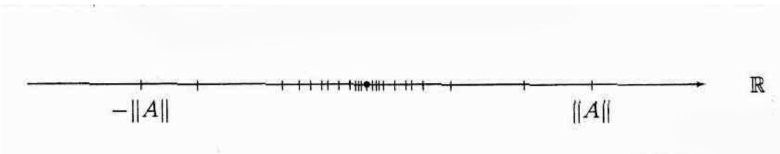
$$\lambda f_n^{'} = Af_n^{'} - (A - \lambda I)f_n^{'} \to Af$$

por que $(A - \lambda I)f_n^{'} \to 0$. Pero como tenemos también

$$\begin{array}{rcl} \lambda f_n^{'} & \rightharpoonup & \lambda f \\ \lambda f_n^{'} & \to & Af \end{array}$$

entonces, tenemos

$$Af = \lambda f$$



Entonces, vamos a poder determinar de manera más precisa la estructura del espectro.

Teorema 2:

Sea $\dim H = \infty$, *A compacto y autoadjunto. Entonces* $\sigma(A)$ *esta compuesto del punto* 0 *y de un conjunto "numerable" de valores propios reales y de las cuales el punto* 0 *es el único punto de acumulación posible. Cada valor propio diferente de cero es de multiplicidad finita.*

Demonstración:

(1) $0 \in \sigma(A)$: si $0 \in \rho(A), A^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ y entonces tenemos $A.A^{-1} = I$ es compacto, lo que es imposible en dimensión infinita.

(2) Cada valor propio diferente de cero es de multiplicidad finita.

Sea $\lambda \neq 0$, un valor propio y H_λ el sub-espacio engendrado por los vectores propios correspondientes. Vamos a probar que la dimensión de H_λ es finita. En el caso contrario, sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de H_λ. Ella contiene una sub-sucesión $\{f_n\}$ débilmente convergente. Y entonces, $\{Af_n\} = \{\lambda f_n\}$ converge, lo que es imposible por que $\|f_n - f_m\|^2 = 2$.

(3) $\forall c > 0$, existe un número finito de valores propios λ tal que $|\lambda| > c$:

Suponemos el contrario. Podemos entonces escoger una sucesión infinita ortonormal de vectores propios $\{e_n\}$ y de valores propios $|\lambda_n| > c$. Entonces, tenemos

$$\left\| \frac{e_n}{\lambda_n} \right\| = \frac{1}{|\lambda_n|} < \frac{1}{c}$$

La sucesión $\left\{\frac{e_n}{\lambda_n}\right\}$ es acotada y va a contener siempre una sub-sucesión $\left\{\frac{e_j}{\lambda_j}\right\}$ debilmente convergente y entonces $\left\{\frac{Ae_j}{\lambda_j}\right\} = \{e_j\}$ va a converger fuertamente, lo que es imposible.

(4) Existe al menos un valor propio λ tal que $|\lambda| = \|A\|$.

Para todo operador autoadjunto A o normal acotado, se puede probar que existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \|A\| = \sup\{|z| : z \in \sigma(A)\}$. Por el teorema anterior, este λ tiene que ser valor propio.

En conclusión, el espectro de un operador compacto autoadjunto tiene la siguiente forma:

El mismo resultado es válido, mutatis mutandis, para un operador compacto cualquiera T: su espectro esta compuesto del punto 0 y de valores propios z de multiplicidad finita ($z \neq 0$) acumulándose alrededor de cero, y contenidos en el disco de centro 0 y de radio $\|T\|$. Además, hay al menos un valor propio sobre la frontera de este disco.

Una consecuencia de estos teoremas es que un operador compacto autoadjunto o normal A satisface **la alternativa de Fredholm**, base de la teoría de ecuaciones integrales. Sea $\lambda \neq 0$, entonces,

- o λ es un valor propio, necesariamente de multiciplidad finita:
$$Af - \lambda f = 0;$$
- o $\lambda \in \rho(A)$, es decir que $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ y entonces la ecuación no-homogenea siguiente:
$$Af = \lambda f + g$$
tiene una solución única $f = (A - \lambda I)^{-1} g$, $\forall g \in H$.

Esto se aplica en particular a los operadores de Hilbert-Schmidt, autoadjuntos o normales, es decir a los operadores integrales con un nucleo $K(x, y)$ de cuadrado integrable en las dos variables, es decir

$$\int \int dxdy \, |K(x, y)|^2 < \infty$$

$\boxed{\text{Teorema 3:}}$

Cualquier operador compacto autoadjunto tiene una base ortonormal de vectores propios.

En otras palabras, si llamamos P_0 al proyector sobre $KerA$ y P_j al proyector sobre el valor propio $\lambda_j \neq 0$, tenemos que $P_j P_k = 0$ y el rango de $P_j < \infty$. Y además, tenemos

$$I = P_0 + \sum_{j \geq 1} P_j \tag{7.13}$$

$$A = \sum_{j \geq 1} \lambda_j P_j \tag{7.14}$$

Esto es el **teorema espectral en el caso de operadores autoadjuntos compactos.** Si escogemos una base ortonormal $\left\{ e_0^{(k)} \right\}$, $k = 1, 2, ...$ en P_0 y hacemos lo mismo en cada P_j, tenemos una base o.n. $\left\{ e_j^{(k_j)} \right\}$, $k_j = 1 ... \dim M_j$ donde $M_j = P_j H$. Así podemos escribir las dos relaciones anteriores de la siguiente forma:

$$I = \sum_{k \geq 1} |e_0^{(k)} >< e_0^{(k)}| + \sum_{j \geq 1} \sum_{k_j = 1}^{\dim M_j} |e_j^{(k_j)} >< e_j^{(k_j)}| \tag{7.15}$$

$$A = \sum_{j \geq 1} \lambda_j \left(\sum_{k_j = 1}^{\dim M_j} |e_j^{(k_j)} >< e_j^{(k_j)}| \right), \lambda_j \to 0 \tag{7.16}$$

Solo nos resta a generalizar este teorema espectral en el caso de operadores autoadjuntos no-compactos.

7.3 Teoría espectral de los operadores autoadjuntos acotados

En el caso de operador no-compacto, esperamos encontrar un espectro continuo, al menos sobre una parte del espectro y las relaciones (7.13) y (7.14) no se generalizan tal cuales. Vamos a tratar de formularlos de manera diferente pero strictamente equivalente.

Entonces, sea A un operador compacto y autoadjunto que vamos a suponer, primero, negativo.

A cada valor propio λ_j va a corresponder un proyector P_j de rango finito y a 0 corresponde el proyector P_0 sobre el $KerA$ (de dimensión finita o infinita). Introducimos los siguientes operadores:

$$E_j = P_1 + P_2 + .. + P_j; \quad j = 1, 2, .. \tag{7.17}$$

es decir que

$$P_j = E_j - E_{j-1} \equiv \Delta E_j \tag{7.18}$$

Los P_j son 2 a 2 ortogonales, entonces los E_j son también proyectores. Más precisamente $\{E_1, E_2, ...\}$ es una sucesión de proyectores y el teorema espectral puede escribirse como

$$A = \sum_{j \geq 1} \lambda_j \Delta E_j \tag{7.19}$$

Cambiamos ahora la variable discreta λ_j tomando los valores $\lambda_{1,2}$ por una variable λ continua y definimos una familia de proyectores $E(\lambda)$ a través de las siguientes relaciones:

- $\lambda < \lambda_1 \equiv \inf \sigma(A) : E(\lambda) = 0$
- $\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1} : E(\lambda) = E_j$
- $\lambda > 0 \equiv \sup \sigma(A) : E(\lambda) = I$

Se puede hacer una idea del contenido del teorema espectral por el siguiente esquema simbólico:

Podemos dibujar un diagrama equivalente para la función numérica:

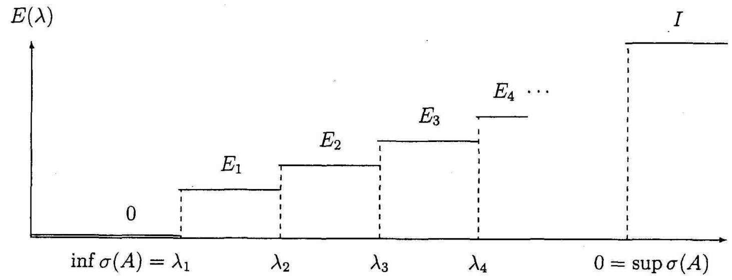
$$\lambda \rightarrow < f|E(\lambda)f > \equiv \|E(\lambda)f\|^2 \tag{7.20}$$

con un buen elemento escogido $f \in H$. Esta última es una función en escala, no-decreciente, comprendida entre 0 y 1 (si $\|f\| = 1$)

La familia $E(\lambda)$ tiene las siguientes propiedades:

- $E(\lambda)$ es el proyector sobre el sub-espacio $H(\lambda)$ engendrado por los vectores propios correspondientes a los valores propios $\lambda_i \leq \lambda$

$$H(\lambda) = \bigoplus_{i:\lambda_i \leq \lambda} H_j \tag{7.21}$$



- $E(\lambda + 0) = E(\lambda)$: continuidad a la derecha.
- $E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0) = P_j$: proyector sobre el sub-espacio propio H_j correspondiente al valor propio λ_j.

Dadas las propiedades descritas arriba, la función $\lambda \rightarrow < f|E(\lambda)f >$ puede ser integrada en el sentido de la integral de Lebesgue-Stieltjes, y la relación (7.19)=(7.14) puede escribirse como:

$$< f|Af >= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \quad d < f|E(\lambda)f >= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \quad d\,\|E(\lambda)f\|^2 \tag{7.22}$$

lo que podemos escribir de manera simbólica:

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \quad dE(\lambda) \tag{7.23}$$

La integral se hace solamente sobre $\sigma(A)$ ya que $E(\lambda)$ es constante fuera de $\sigma(A)$. De misma manera, podemos escribir

$$I = \int_{\sigma(A)} dE(\lambda) \tag{7.24}$$

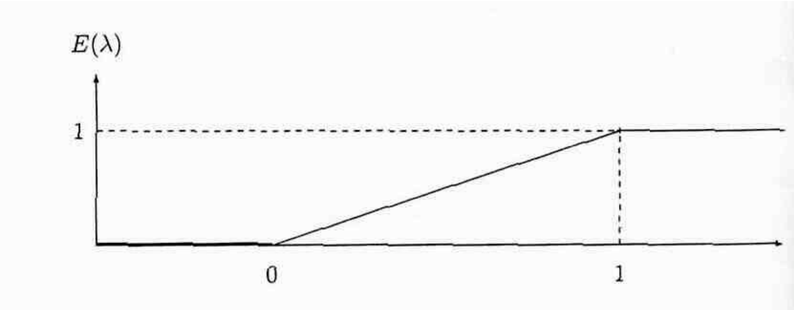
$$= E(\lambda_{\text{max}} + 0) - E(\lambda_{\text{min}} - 0) \tag{7.25}$$

En el caso de un operador compacto autoadjunto con un espectro como el descrito en la sección anterior, tenemos un resultado idéntico si definimos:

$$E(\lambda) = \sum_{i:\lambda_i \leq \lambda} P_i \text{ para } \lambda < 0 \tag{7.26}$$

$$E(\lambda) = P_0 + \sum_{i:\lambda_i \leq \lambda} P_i \text{ para } \lambda \geq 0 \tag{7.27}$$

lo que toma en cuenta el eventual punto de acumulación de valores propios a 0. Esos $E(\lambda)$ tienen las mismas propiedades que lo que describimos anteriormente



en el caso de operador negativo. Podemos entonces enunciar el teorema espectral para un operador compacto autoadjunto de la siguiente manera:

$$A = A^* \in \mathcal{C}(H) \Leftrightarrow \exists \{E(\lambda)\} \text{ t.q.} \quad A = \int \lambda dE(\lambda), I = \int dE(\lambda)$$

De esta forma, el teorema espectral se generaliza al caso del espectro continuo. Para ello, vamos a tomar de nuevo el ejemplo del operador de multiplicación por x en $H = L^2([0,1], dx)$. Su espectro es el segmento $[0,1]$ y es puramente continuo. En particular, el operador "x" toma valores comprendidos ente 0 y 1, entonces, tenemos

$$0 \leq \|xf\| \leq \|f\|$$

Entonces, es plausible que el operador $E(\lambda)$ sea el operador de multiplicación por la función características χ_λ del intervalo $[0,\lambda]$. Más precisamente,

- $\lambda < 0 = \inf \sigma(x) : E(\lambda) = 0$
- $0 \leq \lambda \leq 1 : E(\lambda) = M_{\chi_\lambda}$ es decir $\left(E(\lambda)f\right)(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq \lambda \\ 0 & x > \lambda \end{cases}$
- $\lambda \geq 1 : E(\lambda) = I$

Comparando los dos casos, A compactos y $A =$ operador de multiplicación, podemos ver que el comportamiento de $E(\lambda)$ en un punto λ_0 permite caracterizar el tipo espectral de este punto:

- $\lambda_0 \in \rho(A) \Leftrightarrow E(\lambda_0)$ es constante alrededor de λ_0, es decir $E(\lambda_0 + \epsilon) = E(\lambda_0 - \epsilon)$,$\epsilon > 0$.
- $\lambda_0 \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow E(\lambda_0)$ es dicontinuo en λ_0, es decir $E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0) = P_{\lambda_0}$
- $\lambda_0 \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow E(\lambda_0)$ es creciente en λ_0, es decir $E(\lambda_0) \geq E(\lambda_0 - 0)$ pero $E(\lambda_0 + \epsilon) > E(\lambda_0 - \epsilon), \epsilon > 0$.

Estamos listos ahora para la formulación general del teorema espectral. Llamamos **familia espectral o resolución de la identidad**, a una familia creciente de proyectores ortogonales $E(\lambda), \lambda \in R$ que verifican las condiciones siguientes, donde $m \leq M$:

1. $E(\lambda) = 0$ para $\lambda < m$,
2. $E(\lambda) = I$ para $\lambda \geq M$,
3. $E(\lambda + 0) = E(\lambda)\ \forall\lambda \in R$
4. $E(\lambda)E(\mu) = E(\nu)$ donde $\nu = \min\{\lambda, \mu\}$

La última condición implica que $E(\lambda)$ es un proyector y que la familia es creciente: $E(\lambda) \leq E(\lambda^{'})$ para $\lambda \leq \lambda^{'}$. El intérvalo $[m, M]$ es llamado el **soporte de la familia espectral.**

Teorema espectral:

Sea $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$, un operador autoadjunto y acotado, $\sigma(A) \subset [m, M]$ .Aesteoperador le corresponde univocamente una familia espectral $E(\lambda)$ dentro del intérvalo $[m, M]$, es decir que tenemos en el sentido de la integral de Lebesgue-Stieltjes:

$$A = \int_m^M \lambda\ dE(\lambda) \tag{7.28}$$

$$= \sum_{\lambda_j \in \sigma_c(A)} \lambda_j P_j + \int_{\sigma_c(A)} \lambda\ dE(\lambda) \tag{7.29}$$

Inversamente, toda familia espectral $E(\lambda)$, de soporte $[m, M]$ va a definir , por la relación precedente, un unico operador autoadjunto acotado A con $\sigma(A) \subset [m, M]$.

El teorema espectral puede ser visto en los dos siguientes aspectos:

- cualquier operador autoadjunto puede ser representado por una combinación lineal (generalizada) de proyectores.
- cualquier operador autoadjunto es equivalente a un operador de multiplicación por la variable λ en un espacio adecuado.

Ejemplos:

1. $A = M_g$ operador de multiplicación por la función continua y acotado $g(x)$, entonces tenemos
   - $\sigma(A) = \sigma_c(A) = \overline{\{g(x) | x \in R\}}$
   - $E(\lambda)$ es el operador de multiplicación por la función característica del conjunto $\{s \in R, g(s) \leq \lambda\}$
2. $A =$ proyector P
   - $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\}$
   - $E(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < 0 \\ I - P & 0 \leq \lambda < 1 \\ I & \lambda \geq 1 \end{cases}$

7.4 Generalizaciones

7.4.1 Operadores unitarios

Sabemos que un operador unitario tiene sus valores propios y su espectro sobre el circulo unidad $|\lambda| = 1$. Eso se demuestra con la ayuda de la transformación de Cayley que va a intercambiar operadores autoadjuntos y operadores unitarios. Esto es la generalización de la transformación familiar:

$$\begin{aligned} t &= i\frac{1+w}{1-w} \in R \Leftrightarrow w = \frac{t-i}{t+i} \in S^1 \\ A &= i(I+U)(I-U)^{-1} \Leftrightarrow U = (A-iI)(A+iI)^{-1} \end{aligned}$$

$$A \text{ autoadjunto } \Leftrightarrow U \text{ unitario}$$

Todo la teoría espectral va a pasar de un caso al otro usando esta transformación. En particular el teorema espectral va a escribirse como

$$U = \int_0^{2\pi} e^{it} dE(t) \equiv \int_{|w|=1} w dF(w)$$

7.4.2 Operadores normales acotados

Un operador A es normal si $AA^* = A^*A \Leftrightarrow A = B + iC$ con B, C autoadjunto y $[B, C] = 0$. Entonces, si escribimos

$$\begin{aligned} B &= \int \lambda dE(\lambda) \\ C &= \int \mu dF(\mu) \end{aligned}$$

podemos probar que

$$A = \int_C \nu dG(\nu) \text{ con } G(\lambda + i\mu) = E(\lambda)F(\mu) = F(\mu)E(\lambda)$$

7.4.3 Operadores autoadjuntos no-acotados

A condición de tomar precauciones con el dominio, el teorema espectral se extiende al caso de un operador autoadjunto no-acotado. Hay nada más que tomar el límite $m, M \to \pm\infty$. Así tenemos que cambiar solamente las dos primeras condiciones que sirven para definir una familia espectral y cambiarlos por

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) &= 0 \\ \lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda) &= I \end{aligned}$$

Además si $A = \int \lambda dE(\lambda)$, el dominio de A puede ser obtenido a partir de la familia espectral:

$$D(A) = \left\{ f \in H, \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d < f|E(\lambda)f >< \infty \right\}$$

lo que corresponde a la idea intuitiva:

$$D(A) = \{f, Af \in H\}$$

7.4.4 Calculo funcional

El teorema espectral define un cálculo funcional para los operadores autoadjuntos. Sea $A = \int \lambda dE(\lambda)$ y $\phi : R \to C$, una función razonable. Entonces, tenemos

$$\phi(A) = \int \phi(\lambda) dE(\lambda)$$

que va a definir un operador normal de dominio

$$D(\phi(A)) = \left\{ f \in H, \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\lambda)|^2 d < f|E(\lambda)f >< \infty \right\}$$

En particular, si ϕ es una función de valores reales, $\phi(A)$ es autoadjunto.

Podemos ver que la familia espectral $\{E(\lambda)\}$ caracteriza en hecho toda una clase de operadores autoadjuntos, todas las funciones $\phi(A)$ de A: como el teorema espectral traduce la diagonalización de A, de hecho diagonaliza al mismo tiempo todas las funciones $\phi(A)$.

7.4.5 Operadores con resolvente compacto

Sea A un operador autoadjunto a espectro puramente discreto $\{\lambda_i\}$ con $\lambda_i \to 0$. Para $\lambda_0 \in \rho(A)$, el resolvente $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ es una función de A, en el sentido del cálculo funcional y entonces, su espectro es también puramente discreto:

$$\begin{aligned} A &= \sum_j \lambda_j P_j \\ (A - \lambda_0 I)^{-1} &= \sum_j \frac{1}{\lambda_j - \lambda_0} P_j \end{aligned}$$

Este resolvente es acotado y su descomposición espectral es parecida a la decomposición de un operador compacto. De hecho tenemos la relación: A autoadjunto con espectro puramente discreto de multiplicidad finita y no-acotado$\Leftrightarrow$ $(A - \lambda_0 I)^{-1}$ compacto $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$

Ejemplo:

Sea $A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ el hamiltoniano del oscilator armónico, entonces tenemos:

- $\sigma(A) = \{n + 1/2, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$ puramente discreto.
- $A = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1/2)P_n$: donde $P_n = |\varphi_n >< \varphi_n|$ y $\varphi_n =$ la n° función de Hermite.
- $0 \in \rho(A)$ y entonces, A^{-1} es un operador acotado.
- $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1/2} P_n$ es un operador de Hilbert-Schmidt y entonces compactos.

7.5 Ejemplos

7.5.1 Parte angular del Laplaciano

En los capítulos anteriores, consideramos la decomposición del laplaciano en tres dimensiones en coordenados esféricas:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} D_{\theta\varphi}$$

El operador $-D_{\theta\varphi} = L_A^2$ es el cuadrado del momento angular en mecánica cuántica, es autoadjunto en $L^2(S^2)$ y tiene por funciones propias, los armónicos esféricos:

$$L_A^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

con $m = -l...l$. El operador es no-acotado y su espectro es puramente discreto, de valores propios $l(l+1), l = 0, 1, 2, ...$ cada una con multiplicidad $(2l+1)$. El teorema espectral nos da

$$L_A^2 = \sum_{l=0}^{\infty} l(l+1) \sum_{m=-l}^{l} |Y_l^m >< Y_l^m|$$

donde $|Y_l^m >< Y_l^m| = P_{lm}$ es el proyector sobre $Y_l^m(\theta, \varphi)$. La familia espectral se escribio como

$$E(\lambda) = \sum_{l:l(l+1)\leq\lambda} \left(\sum_{m=-l}^{l} P_{lm} \right)$$

Como L_A^2 tiene un espectro puramente discreto, no-acotado y de multiplicidad finita, su resolvente es compacto. Así por ejemplo para $\lambda_0 = -1 \in \rho(L_A^2)$, tenemos

$$(L_A^2 + I)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)+1} \left(\sum_{m=-l}^{l} P_{lm} \right)$$

Tomando en cuenta la multiplicidad, podemos verificar fácilmente que este resolvente es un operador de Hilbert-Schmidt, no-nuclear:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{1}{l(l+1)+1} &\sim \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{l}=\infty \\ \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{1}{\left(l(l+1)+1\right)^2} &\sim \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{l^2}<\infty \end{aligned}$$

7.5.2 Hamiltoniano del átomo de Hidrógeno en mecánica cuántica

El Hamiltoniano del átomo de Hidrógeno es el operador $H_{at} = -\Delta - 1/r$ en $L^2(R^3)$. Este operador es autoadjunto y no acotado. La ecuación de Schrödinger se escribe como

$$H_{at}\Psi = E\Psi$$

El espectro de H_{at} es igual a

- $E < 0$: espectro puramente discreto: $E_n = -a/n^2$ y de multiplicidad n^2 para $n = 1, 2, ...$
- $E \geq 0$: espectro puramente contínuo: $\sigma_c(H_{at}) = [0, \infty[$

Por el teorema espectral, tenemos

$$H_{at} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}P_n + \int_0^{\infty}\lambda dE(\lambda)$$

con rango de $P_n = n^2$.

En el subespacio P_-H, el operador esta reducido a $H_{at}P_-$ y tiene un espectro puramente discreto. Sus valores propios son $1/n^2$, de multiplicidad n^2 para $n = 1, 2, ...$ Es un operador de HS no-nuclear por que

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{\infty}n^2\lambda_n &= \sum_{1}^{\infty}n^2\frac{1}{n^2}=\infty \\ \sum_{1}^{\infty}n^2\lambda_n^2 &= \sum_{1}^{\infty}n^2\frac{1}{n^4}<\infty \end{aligned}$$

Es importante notar que la noción de espectro desarrollado aquí desde el punto de vista matemático, coincide exactamente con la noción de espectro usado en física atómica.

Capitulo 8

Ejemplos

En este capítulo, vamos a estudiar diferentes ejemplos de operadores:

- operadores de multiplicación en $L^2(R)$
- operadores diferenciales en $L^2(R)$
- operadores diferenciales en $L^2([a,b])$
- operadores integrales en $L^2([a,b])$

Vamos a tratar de responder a la pregunta de cuándo esos operadores son autoadjuntos. En particular para los operadores diferenciales en $L^2([a,b])$, vamos a ver la relación con los operadores y las ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville.

8.1 Operadores de multiplicación en $L^2(R)$

Sea t una función medible sobre R , M_t es el operador de multiplicación por t en $L^2(R)$:

1. $D(M_t) = \{f \in L^2, \quad tf \in L^2\}$
2. $\forall f \in D(M_t)$, $(M_t f)(x) = t(x)f(x)$

Vamos a suponer que $D(M_t)$ es denso aunque no es absolutamente necesario.

$\boxed{\text{Teorema 1:}}$

$$M_t^* = M_{\overline{t}} \tag{8.1}$$

Demostración:

- $D(M_t) = D(M_{\overline{t}})$

- $\forall f, g \in D(M_t)$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle g|M_t f\rangle &= \int \overline{g(x)}t(x)f(x)dx \\ &= \int \overline{\overline{t(x)}g(x)}f(x)dx = \langle M_{\overline{t}}g|f\rangle\end{aligned}$$

es decir que $M_{\overline{t}} \subset M_t^*$

- Sea $g \in D(M_t^*)$, vamos a mostrar que $\overline{t}g \in L^2$ es decir que $g \in D(M_{\overline{t}})$. Para ello, tenemos que para cualquier $f, g \in D(M_t) \subset D(M_{\overline{t}})$,

$$\begin{aligned}\langle M_t^* g|f\rangle &= \langle g|M_t f\rangle \\ \int \overline{(M_t^* g)(x)}f(x)dx &= \int \overline{g(x)}t(x)f(x) \\ &\Rightarrow \int \left(\overline{(M_t^* g)(x) - \overline{t(x)}g(x)}\right) f(x)dx = 0\end{aligned}$$

Como esto tiene que ser cierto para cualquier $f \in D(M_t)$ denso, entonces tenemos

$$M_t^* g)(x) - \overline{t(x)}g(x) = 0 \text{ (casi en todos puntos)}$$

es decir que

$$M_t^* g = g\overline{t} \tag{8.2}$$

El miembro de izquierda pertenece a L^2, entonces también el miembro de derecho, lo que acaba la demostración.

$\boxed{\text{Consecuencia:}}$

1. Si t es una función real, M_t es autoadjunto sobre $D(M_t)$
2. $\sigma(M_t) = \sigma_c(M_t) = \overline{\{t(x), x \in R\}}$

Notas: Como un operador U es un isomorfismo entre espacios de Hilbert, este isomorfismo va a conservar todas las relaciones entre operadores o entre vectores. Así, por ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned}A \text{ cerrable} &\Leftrightarrow U^{-1}AU \text{ cerrable} && (8.3)\\ A \text{ cerrado} &\Leftrightarrow U^{-1}AU \text{ cerrado} && (8.4)\\ A \text{ simétrico} &\Leftrightarrow U^{-1}AU \text{ simétrico} && (8.5)\\ A \text{ autoadjunto} &\Leftrightarrow U^{-1}AU \text{ autoadjunto} && (8.6)\\ \sigma(A) &= \sigma(U^{-1}AU) && (8.7)\\ \sigma_p(A) &= \sigma_p(U^{-1}AU) && (8.8)\\ & \quad etc.... && (8.9)\end{aligned}$$

8.2 Operadores diferenciales con coeficientes constantes en $L^2(R)$

Para tratar este tipo de operadores $P(\frac{1}{i}\frac{d}{dx})$, con P un polinomio con coeficiente constantes, es suficiente usar las propiedades de la transformación de Fourier junto a las propiedades de la sección precedente. Definimos primero la restricción del operador a $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ la clase de Schwarz de las funciones con decrecimiento rápido (para su definición, ver notas de cursos métodos mat. II, cap. sobre la transformación de Fourier).

$$T_0 = \begin{cases} D(T_0) \\ (T_0 f)(x) = P(\frac{1}{i}\frac{d}{dx})f(x) \end{cases} \tag{8.10}$$

$\boxed{\text{Teorema 1:}}$

1. T_0 es cerrable y $\widetilde{T_0} \equiv T = \mathcal{F}^{-1} M_P \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es la transformación de Fourier.
2. $T_0^* = T^* = \mathcal{F}^{-1} M_{\overline{P}} \mathcal{F}$
3. T autoadjunto $\Leftrightarrow$ P real
4. $(T-\lambda)^{-1} = \mathcal{F}^{-1} M_{(P-\lambda)^{-1}} \mathcal{F}$
5. T no tiene ningún valor propio y

$$\sigma(T) = \sigma_c(T) = \overline{\{P(x) : x \in R\}} \tag{8.11}$$

8.3 Operadores diferenciales en $L^2([a,b])$

Tomamos por ejemplo el operador $p \equiv \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ sobre un intérvalo finito $[a,b]$. La relación definiendo el adjunto es

$$\langle p^* g | f \rangle = \langle g | pf \rangle \tag{8.12}$$

para $f \in D(p)$ y $g \in D(p^*)$. Un calculo explicito nos da, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \langle g | pf \rangle &= \int_a^b \overline{g(x)} \frac{1}{i} \frac{df(x)}{dx} dx \\ &= \int_a^b \overline{\frac{1}{i}\frac{dg(x)}{dx}} f(x) dx + \frac{1}{i}\Big(\overline{g(b)} f(b) - \overline{g(a)} f(a)\Big) \end{aligned} \tag{8.13}$$

Para tener un operador simétrico, tenemos que imponer que el termino suplementario que aparece durante la integración por partes se anula. Eso va a ser el papel de las **condiciones frontera**. Por ejemplo, si definimos el operador p_0:

$$p_0 = \begin{cases} D(p_0) = \Big\{ f \in L^2([a,b] | f' \in L^2([a,b], f(a) = f(b) = 0 \Big\} \\ p_0 f = \frac{1}{i}\frac{d}{dx} f \end{cases} \tag{8.14}$$

Encontramos que su adjunto es

$$p_0^* = \begin{cases} D(p_0^*) = \left\{ f \in L^2([a,b] | f' \in L^2([a,b] \right\} \\ p_0^* f = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f \end{cases} \tag{8.15}$$

Es decir que p_0 es simétrico (cerrado) pero no-autoadjunto:

$$p_0 \subset p_0^* \tag{8.16}$$

Entonces, hay un fenómeno nuevo comparado a las secciones anteriores y es el de las condiciones frontera que van a intervenir en la definición del dominio del operador y de su adjunto. Por ejemplo, para un operador diferencial general de segundo grado, con coeficientes variables, dado por la siguiente expresión:

$$L(f) = q_0 f'' + q_1 f' + q_2 f \tag{8.17}$$

donde $q_j, 1/q_0$ son funciones regulares sobre $[a,b]$. Integrando por partes obtenemos:

$$\int_a^b \overline{g(x)} \left(L(f)\right)(x) dx = \int_a^b \overline{\left(L^*(g)\right)(x)} f(x) dx + Q(\eta, \varsigma) \tag{8.18}$$

donde

$$L^*(g) = (q_0 g)'' - (q_1 g)' + q_2 g \tag{8.19}$$

$$Q(\eta, \varsigma) = \overline{g} q_0 f' + \overline{g} q_1 f - (\overline{g} q_0)' f \Big|_a^b \tag{8.20}$$

es decir que $Q(\eta, \varsigma)$ es una expresión sesquilineal en las siguientes cantidades, representadas en los datos a las fronteras:

$$\eta \equiv (f(a), f'(a), f(b), f'(b)) \tag{8.21}$$

$$\varsigma \equiv (g(a), g'(a), g(b), g'(b)) \tag{8.22}$$

Vamos a llamar condiciones de frontera a la anulación de un determinado numero m $(0 \leq m \leq 4)$ de combinaciones lineales independientes de los η_i o ς_i. Si definimos el operador L para los siguientes datos:

$$L = \begin{cases} D(L) = \left\{ f \in L^2 | L(f) \in L^2, \text{condiciones frontera sobre } f \right\} \\ Lf = L(f) \end{cases} \tag{8.23}$$

Podemos ver que el adjunto va a ser definido por la relación:

$$\langle L^* g | f \rangle = \langle g | L f \rangle$$

con $f \in D(L)$ y $g \in D(L^*)$.

$$L^* = \begin{cases} D(L^*) = \left\{ g \in L^2 | L^*(g) \in L^2, \text{condiciones frontera adjuntas sobre } g \right\} \\ L^* g = L^*(g) \end{cases} \tag{8.24}$$

donde las condiciones de frontera adjuntas son exactamente las condiciones necesarias para anular $Q(\eta, \varsigma)$.

En particular para tener un operador autoadjunto $L = L^*$, tenemos que satisfacer las dos condiciones:

1. $L(h) = L^*(h)$

2. Equivalencia entre las condiciones frontera y condiciones frontera adjuntas.

Con las fórmulas explícitas para $L(h)$, tenemos

$$L(h) = q_0 h^{''} + q_1 h^{'} + q_2 h \quad (8.25)$$
$$L^*(h) = q_0 h^{''} + (2q_0 - q_1)h^{'} + (q_0^{''} - q_1^{'} + q_2)h \quad (8.26)$$

Así la primera condición es equivalente a imponer

$$q_0^{'} = q_1 \quad (8.27)$$

En tal caso, el operador diferencial $L(h)$ toma la forma:

$$L(h) = (q_0 h^{'})^{'} + q_2 h \quad (8.28)$$

Tal operador diferencial corresponde a los **operadores de Sturm-Liouville** estudiado en los capítulos anteriores. Tal operador es o no es autoadjunto dependiendo de las condiciones frontera.

8.4 Operadores integrales en $L^2([a,b])$

Un operador integral en $L^2([a,b])$ es un operador de la forma:

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy \quad (8.29)$$

donde la función $k(x,y)$ se llama **el núcleo de** K. Tenemos que distinguir entre dos tipos de operadores:

1. los **operadores de Fredholm** por los cuales las extremidades de la integral se fijan como el la Ec.(8.29).

2. los **operadores de Volterra** correspondientes a una extremidad variable. Ejemplo:
$$(Kf)(x) = \int_a^x k_0(x,y) f(y) dy \quad (8.30)$$
lo que es igual a imponer que $k(x,y) = 0$ para $x > y$ o que $k(x,y) = \theta(x-y) k_0(x,y)$.

Al contrario de los operadores diferenciales sobre $L^2([a,b])$, que nunca son acotados, los operadores integrales son muchas veces acotados y también a veces pueden ser compactos. Mas precisamente, tenemos el siguiente teorema:

$\boxed{\text{Teorema 1:}}$

Sea K un operador acotado en $L^2([a,b])$. Entonces, K es un operador de Hilbert-Schmidt si y solamente si es un operador integral a núcleo k de Hilbert-Schmidt, es decir tal que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \, dxdy < \infty \tag{8.31}$$

La demostración va a usar la aproximación de K por operadores de rango finito, es decir **con núcleo separable:**

$$k_N(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x)\overline{v_i(y)} \tag{8.32}$$

$$K_N = \sum_{i=1}^{N} |u_i >< v_i| \tag{8.33}$$

Ejemplos:
Los siguientes núcleos son núcleos de Hilbert-Schmidt:

1. $k(x,y)$ función acotada en un cuadrado finito $[a,b] \times [a,b]$
2. $|x-y|^a$ con $a < 1/2$ en un cuadrado finito.
3. $e^{-(x^2+y^2)}$ en el plano.

El siguiente núcleo nos da un operador acotado pero no de Hilbert-Schmidt:

1. $e^{-|x-y|}$ en el plano.

De hecho, si $k(x,y) = k(x-y)$ (núcleo de convolución), el operador asociado K en $L^2(R)$ nunca es de Hilbert-Schmidt porque la integral (8.31) va siempre a diverger (para mostrarlo, pasar a las variables $u = x-y$,$v = x+y$.

8.4.1 Ecuaciones integrales: resolución por iteración.

Consideramos la ecuación no-homogenea:

$$f = g + \mu K f \tag{8.34}$$

en $L^2([a,b])$, es decir

$$f(x) = g(x) + \mu \int_a^b k(x,y) f(y) dy \tag{8.35}$$

La función g es conocida, asi que también μ y tenemos que encontrar la función $f(x)$.

Si integramos la ecuación (8.35), obtenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned}
f^{(0)} &= g \\
f^{(1)} &= g + \mu K g = (1 + \mu K) g \\
f^{(2)} &= g + \mu K (g + \mu K g) = (1 + \mu K + \mu^2 K^2) g \\
& . \\
& . \\
f^{(n)} &= g + \mu K f^{(n-1)}
\end{aligned}$$

donde K^2 es el operador integral de núcleo

$$k_2(x,y) = \int_a^b k(x,z)k(z,y)dz \tag{8.36}$$

Entonces, formalmente, tenemos

$$\begin{aligned}
f &= (1 + \mu K + \mu^2 K^2 + \mu^3 K^3 + ...) g && (8.37) \\
&= (1 - \mu K)^{-1} g && (8.38)
\end{aligned}$$

La siguiente pregunta es saber cuando la Ec. (8.38) tiene sentido. De hecho, podemos reconocer el resolvente de K :

$$(1 - \mu K)^{-1} = \lambda (\lambda - K)^{-1}, \quad \lambda = 1/\mu \tag{8.39}$$

Para que (8.38) sea definido para cualquier g de L^2, necesitamos este resolvente sea acotado, es decir, que $\lambda \in \rho(K)$.

Si K es compacto, a fortiori si es de Hilbert-Schmidt, podemos aplicar la alternativa de Fredholm:

- o λ es un valor propio de K y el resolvente no existe y tenemos $|\lambda| \leq \|K\|$ es decir $|\mu| \geq 1/\|K\|$.

- o$\lambda \in \rho(K)$, el resolvente es acotado y (8.38) es la solución de la ecuación . Eso es seguramente verdadero si $\|K\| \, |\mu| < 1$. En tal caso, el desarrollo dado en (8.37) se llama **serie de Neumann**, va a converger en norma y nos da la solución.

Notamos que en el primero caso pueden existir soluciones para funciones g particulares.

Nos queda hallar concretamente la solución de tal ecuación usando la serie de Neumann que es exactamente lo que ha realizado Fredholm.

Primero, vamos a estudiar el caso de núcleo separable:

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\overline{v_i(y)}$$

La ecuación inicial se escribio como

$$f(x) = g(x) + \mu \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \int_a^b \overline{v}_i(y) f(y) dy$$

Tenemos que determinar los $A_i = \int_a^b \overline{v}_i(y) f(y) dy$:

$$\begin{aligned}
A_i &= \int_a^b \overline{v_i} f \\
&= \int_a^b \overline{v_i} \left(g + \mu \sum_{j=1}^{n} A_j u_j \right) \\
&= \left(\int_a^b \overline{v_i} g \right) + \mu \sum_{j=1}^{n} A_j \left(\int_a^b \overline{v_i} u_j \right) \\
&= G_i + \mu \sum_{j=1}^{n} A_j M_{ij}
\end{aligned}$$

donde definimos

$$\begin{aligned}
G_i &= \left(\int_a^b \overline{v_i} g \right) \\
M_{ij} &= \int_a^b \overline{v_i} u_j
\end{aligned}$$

es decir que tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \mu M_{ij} \right) Aj = G_i$$

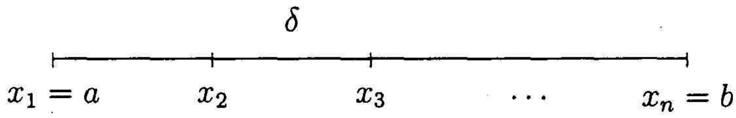
O sobre forma matricial:

$$(I - \mu M) \overrightarrow{A} = \overrightarrow{G}$$

Para que el problema tenga solución, necesitamos que $\det(I - \mu M) \neq 0$ y entonces, la solución única esta dada por

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= (I - \mu M)^{-1} \overrightarrow{G} && (8.40) \\
&= \frac{\sum \text{ minores } [I - \mu M]}{\det(I - \mu M)} \overrightarrow{G} && (8.41)
\end{aligned}$$

En el caso general de cualquier núcleo de Hilbert-Schmidt, podemos regresar al caso anterior por discretización:



Y la ecuación (8.37) va a escribirse como

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= g(x_i) + \mu\delta \sum_{j=1}^{n} k(x_i, x_j) f(x_j) \\
\sum_{j=1}^{n} \left[\delta_{ij} - \mu\delta k(x_i, x_j)\right] f(x_j) &= g(x_i) \\
\left[I - \mu\delta K_n\right] \overrightarrow{F} &= \overrightarrow{G}
\end{aligned}$$

la solución es como en el caso anterior igual a

$$f(x_i) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \ \text{minores}_{ij} \left[\delta_{ij} - \mu\delta k(x_i, x_j)\right] g(x_j)}{\det\left[\delta_{ij} - \mu\delta k(x_i, x_j)\right]}$$

Desarrollamos los menores los determinamos y después pasamos al límite $= (b-a)/n$.

Para n fijo, el determinar al denominador de la solución es un polinomios de grado n en $\mu\delta$:

$$D_n(\mu) \equiv \det\left[\delta_{ij} - \mu\delta k(x_i, x_j)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{vmatrix} 1-\mu\delta k(x_1,x_2) & -\mu\delta k(x_1,x_2) & \dots & -\mu\delta k(x_1,x_n) \\ -\mu\delta k(x_2,x_1) & 1-\mu\delta k(x_2,x_2) & & \\ \vdots & & & \\ -\mu\delta k(x_n,x_1) & \dots & & 1-\mu\delta k(x_n,x_n) \end{vmatrix} \\
&= 1 - \mu\delta \sum_{1}^{n} k(x_i,x_i) + \frac{(\mu\delta)^2}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \begin{vmatrix} k(x_i,x_i) & k(x_i,x_j) \\ k(x_j,x_i) & k(x_j,x_j) \end{vmatrix} \\
&\quad -\frac{(\mu\delta)^3}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{N} \begin{vmatrix} k(x_i,x_i) & k(x_i,x_j) & k(x_i,x_k) \\ k(x_j,x_i) & k(x_j,x_j) & k(x_j,x_k) \\ k(x_k,x_i) & k(x_k,x_j) & k(x_k,x_k) \end{vmatrix} + \dots
\end{aligned}$$

Pasando al límite $n \to \infty (\delta \to dx)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
D(\mu) &= \lim_{n\to\infty} D_n(\mu) \\
&= 1 - \mu \int_a^b dx \quad k(x,x) \\
&\quad + \frac{\mu^2}{2!} \int_a^b dx_1 \int_a^b dx_2 \begin{vmatrix} k(x_1,x_1) & k(x_1,x_2) \\ k(x_2,x_1) & k(x_2,x_2) \end{vmatrix} - \dots
\end{aligned}$$

es decir una serie donde el n-ésimo termino es una integral de multiplicidad $n-$ de una determinante de orden n. Fredholm probo que esta serie es convergente para cualquier $\mu \in C$ y va a definir una función entera. Después, Fredholm va a proceder de la misma manera para los menores y obtener así la solución. Podemos mostrar que si k es un núcleo de Volterra, $D(\mu)$ no tiene ningún cero. Entonces, un operador Hilbert-Schmidt de Volterra no tiene ningún valor propio $\lambda \neq 0$. Podemos ver directamente el interés de este método para la resolución numérica de ecuaciones integrales.

Capitulo 9

Bibliografía

Se puede encontrar información complementaria a este curso en los siguientes libros. La mayoría de estos libros están disponibles en la biblioteca del IFUG o están en proceso de compra.

9.1 Funciones especiales, Sturm-Liouville, funciones de Bessel y aplicaciones.

1. Arfken G., "Mathematical methods for physicist", Academic press.

   Seguimos muy de cerca su capítulo sobre el método de Frobenius, singularidades regulares o esenciales.

2. Courant H., Hilbert D. " Methods of mathematical physics".

3. N.N. Lebedev, " Special functions and their applications", Dover Publications.

4. A. Sommerfeld, " Partial differential equations in Physics", Academic Press.

5. I.S.Sneddon, " Special functions of mathematical physics and Chemistry".

6. Morse and Feshback, "Methods of theoretical physics", Mc Graw-Hill.

7. B. Kusse, and E. Westwig, " Mathematical physics", Wiley-Interscience.

8. C.J. Tranter, " Bessel functions with some physical applications".

9. G.N. Watson, " A treatise on the theory of Bessel functions".

   La biblia sobre las funciones de Bessel.

   En las próximas referencias, ustedes pueden encontrar libros con tablas de funciones e integrales:

10. M.Abramowitz and I.A. Stegun, " Handbook of mathematical functions"

11. E. Jahnke and F. Emde, " Tables of functions".

12. A. Erdelyi et al, " Higher transcendental functions, vol.1-2", Mc Graw Hill, 1953.

9.2 Espacio de Hilbert y teorías de los operadores.

1. M.Reed and B. Simon, " Methods of modern mathematical Physics, tome 1: functional analysis", Academic Press, 1980

   Finalmente disponible en la biblioteca del IFUG!

2. J. Weidmann,"Linear operators in Hilbert spaces", Springer-Verlag, Berlin 1980.

9.3 Operadores diferenciales.

1. R.D.Richtmyer," Principles of advanced mathematical physics I", Springer-verlag, Berlin 1980

9.4 Operadores integrales.

1. F.G.Tricomi,"Integral equations",Dover eds.

2. H.W. Wyld, " Mathematical methods for physics", Benjamin N-Y,1976

3. H. Hochstadt, " Integral equations", Wiley, London, 1973

4. P.R.Halmos and V.S. Sunder, " Bounded integral operators on L^2 spaces",Springer-verlag, Berlin, 1978.

5. D.Porter, D.S.G. Stirling, "Integral equations", Cambridge University press, Cambridge 1990.

Capitulo 10

Ejercicios

1. Resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales (α, β, φ): Las coordenadas esferoidales están relacionadas con las coordenadas cartesianas, con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= c \sinh\alpha \sin\beta \cos\varphi && (10.1) \\ y &= c \sinh\alpha \sin\beta \sin\varphi && (10.2) \\ z &= c \cosh\alpha \cos\beta && (10.3) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha < \infty \\ 0 &\leq \beta \leq \pi \\ -\pi &\leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

Usando esas relaciones, podemos probar que el elemento de longitud ds está dado por

$$ds^2 = c^2(\sinh^2\alpha + \sin^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \sinh^2\alpha \sin^2\beta d\varphi^2 \qquad (10.4)$$

- Expresar el laplaciano en esas coordenadas
- Usando el método de separación de variables, resolver la ecuación de Laplace:
$$\Delta u(\alpha, \beta, \varphi) = 0 \qquad (10.5)$$
en el caso de condiciones fronteras independiente del ángulo φ
- Verificar que la ecuación en β admite solución de tipo polinomios de Legendre
- Verificar que haciendo la substitución $\beta = i\alpha$ en la ec. en la variable β, obtenemos la ec. en la variable α y usando este resultado, obtener la solución de la ec. en α en el caso de un problema interior, es decir cuando $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$.

- Escribir la solución lo mas general y encontrar la solución única correspondiente a la siguiente condición frontera:

$$u(\alpha_0, \beta, \varphi) = \cos\beta = f(\beta)$$

usando la serie de Legendre de la función $f(\beta)$,

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\beta) \\ c_l &= (l + \frac{1}{2}) \int_0^{\pi} f(\beta) P_l(\cos\beta) \sin\beta d\beta \end{aligned}$$

2. Demostrar que la ecuación de Laguerre puede escribirse como operador autoadjunto (Sturm-liouville) y multiplicando por e^{-x} y que e^{-x} es la función de peso

$$xy^{''} + (1 - x)y^{'} + py = 0$$

3. Demostrar que la ecuación de Hermite puede escribir como una ec. autoadjunta (sentido de Sturm-Liouville) multiplicandola por e^{-x^2}

$$y^{''} - 2xy^{'} + 2ny = 0$$

4. Usando las propiedades del Wronskiano, verificar que si la ec. es autoadjunta, tenemos

$$W(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)}$$

5. Resolver la ec. autoadjunta siguiente:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) = 0$$

en el caso de la ec. de Legendre ($p(x) = (1 - x^2)$), de la ec. de Laguerre et de Hermite. En todos los casos, hallar las dos soluciones linealmente independiente.

6. En dimensión $d (d \geq 2)$, el laplaciano en coordenadas polares tiene la siguiente forma

$$\Delta^{(d)} = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2} D_{\theta\phi}$$

donde $D_{\theta\phi}$ es el operador dependiente solamente de los ángulos polares. Estamos interesados a las funciones propias de la parte radial de este laplaciano. Esas funciones son determinadas por la ecuación:

$$\left(d_r^2 + \frac{d-1}{r} d_r\right) f(r) = -k^2 f(r)$$

Usando el anzatz $f(r) = r^{\alpha} g(\beta r)$, transformar esta ecuación en una ecuación de Bessel (escoger los valores de α y β para que la ecuación de $g(\beta r)$ sea la ecuación de Bessel.

7. Usando el comportamiento asimptotico de las funciones cilíndricas, hallar el wronskiano:

$$zW(J_n(z), J_{-n}(z))$$
$$zW(N_n(z), J_{-n}(z))$$
$$zW(J_n(z), N(z))$$

8. Hallar el comportamiento asinptotico en $z \to 0$ de las funciones cilíndricas usando las propiedades de la función $\Gamma(z)$.

9. En muchos problemas físicos, encontramos la siguiente ecuación:

$$y^{''} + \frac{1}{x}y^{'} + (k^2 - \frac{n^2}{x^2})y = 0$$

donde la solución es una función definida sobre los reales positivos. En general, n es un real positivo y depende de la geometría del problema. k^2 es una constante compleja que aparece durante la separación de variable. Sin perder generalidad, podemos suponer que Re$k \geq 0$. El método para resolver esta ecuación es la siguiente. Consideramos la ecuación

$$y^{''}(z) + \frac{1}{z}y^{'}(z) + (k^2 - \frac{n^2}{z^2})y(z) = 0$$

donde $y(z)$ es una función en el plano complejo. Ponemos

$$y(z) = f(az)$$

donde a es un numero complejo. Determinar a para encontrar la ecuación de Bessel y expresarla en función de n y k. Deducir las soluciones generales de la ecuación original.

10. Evaluar la integral de Weber

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} J_m(bx) x^{m+1} dx$$

usando la definición en serie de $J_m(x)$ y que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{m+k} dt = \Gamma(1 + k + m)$$

y usando la serie de taylor de la exponencial.

11. Evaluar la integral

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx$$

usando la representación integral de $J_0(bx)$ y

$$\int \frac{dx}{1 + b\sin^2 x} = Arc\tan\left(\frac{\sqrt{1+b}\tan x}{\sqrt{1+b}}\right)$$

12. Hallar que

$$J_n(-x+i0) - J_n(-x-i0) = 2iJ_n(x)\sin n\pi$$

para $x > 0$. Esto caracterizá el comportamiento de las funciones de Bessel sobre el corto $]-\infty, 0]$. Para la demonstración, usar la definición en serie de las funciones de Bessel y las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \ln(-x+i0) &= \ln x + i\pi \\ \ln(-x-i0) &= \ln x - i\pi \\ z^a &= e^{a\ln z} \end{aligned}$$

13. Consideramos una cadena elastica ligada a un techo por una de sus extremidades. Vamos a estudiar sus modos de vibraciones en el campo de gravedad. Suponemos L sea su longitud y ρ su densidad constante. Si $T(x)$ es la tensión en la cadena, su movimiento $u(x,t)$ alrededor de la vertical tiene que satisfacer la ec. dif.:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Fijando el origen de la variable x a la extremidad libre de la cadena, la tensión resultante de la gravedad vale

$$T(x) = \rho g x$$

Hacer la separación de variable $u(x,t) = V(t)X(x)$, la solución para $V(t)$ es elemental y la solución para $X(x)$ se obtiene haciendo la substitución :

$$X(x) = h(\sqrt{x})$$

Imponer finalmente las condiciones frontera para obtener las frecuencias de los modos normales de vibración. Probar que

$$f_i = \frac{\sqrt{g}}{4\pi\sqrt{L}}\lambda_i^{(0)}$$

14. Resolver la ec. de calor en el plano

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

en una placa circular, homogenea y isotropica de radio a y con las condiciones frontera:

$$\begin{aligned} u(a,\theta,t) &= 0 \\ u(r,\theta,0) &= f(r,\theta) \end{aligned}$$

15. Resolver la ec. de Schrödinger independiente del tiempo

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi$$

con $E \geq 0$, de una particula libre en coord. polares en dos dimensiones. Imponer como condición suplementaria que la función de onda no diverge al infinito.

16. Determinar las frecuencias propias de una membrana circular de radio a. El movimiento $u(r, \theta, t)$ de una tal membrana es regido por la ec. de ondas:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

con condiciones frontera

$$u(a, \theta, t) = 0$$

17. Hallar la solución regular de $\Delta f = 0$ en una esfera de radio L que satisface

$$f(r = L, \theta, \varphi) = \cos^2\theta$$

18. idem que el ejercico anterior pero para $\Delta f = -f$

19. Resolver la ecuación de ondas a dentro de una esfera de radio a con

$$u(a, \theta, \varphi, t) = 0$$

conociendo la funcion de onda y su derivada en la variable t en $t = 0$.

20. Resolver la ec. de ondas en coordenadas cilíndricas, en un volumen cilíndrico de longitud L y de radio a con condiciones frontera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial r}(a, \varphi, z, t) &= 0 \\ \Psi(r, \varphi, 0, t) &= \Psi(r, \varphi, L, t) = 0 \end{aligned}$$

21. Probar que la ec. de Legendre tiene dos singularidades regulares en $x = \pm 1$ y en $x = \infty$.

22. Probar que la ec. de Laguerre tiene una singularidad regular en $x = 0$ y irregular en $x = \infty$.

23. Verificar las singularidades de las ecuaciones siguientes:

hipergeometrica	$x(x-1)y'' + ((1+a+b)-c)y' + aby = 0$
hipergeométrica confluente	$xy'' + (c-1)y' - ay = 0$
Hermite	$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$
oscilator armónico	$y'' + \omega^2 y = 0$
Chebyshev	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

24. Probar que la substitución

$$
\begin{aligned}
x &\rightarrow \frac{1-x}{2} \\
a &= -l \\
b &= l+1 \\
c &= 1
\end{aligned}
$$

transforma la ec. hipergeometrica en ec. de Legendre.

25. Resolver la ec. de Legendre usando el metodo de Frobenius

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy^{'} + n(n+1)y = 0$$

26. Resolver la ec. de Hermite usando el método de Frobenius.

27. Resolver la ec. de Laguerre usando el método de Frobenius.

28. Resolver la ec. de Chebyshev usando el metodo de Frobenius y escoger n para obtener una solución de tipo polinomial.

29. Resolver la ec.

$$(1-x^2)y^{''} - 3xy^{'} + n(n+2)y = 0$$

30. Obtener una solución en serie de la ec. hipergeométrica y verificar la convergencia de la solución.

31. Obtener dos soluciones en serie de la ec. hipergeométrica confluente y verificar la convergencia de las series.

32. Resolver la ec. de Schrödinger usando el método de Frobenius,

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi + (E-V)\Psi = 0$$

para los siguientes potenciales:

$$
\begin{aligned}
V(x) &= A\frac{e^{-ax}}{x} \\
V(x) &= A\cosh(ax) \\
V(x) &= A\cos ax
\end{aligned}
$$

Encontrar los tres primeros términos no-cero.

33. Hallar una solución en serie de la ec.

$$y^{''} + \frac{1}{x^2}y^{'} - \frac{2}{x^2}y = 0$$

34. La función de Bessel modificada $I_0(x)$ satisface la ec. dif.

$$x^2 y^{''} + xy^{'} - x^2 y = 0$$

Suponemos que la serie de $I_0(x)$ tiene la siguiente forma

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}(1 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + ...)$$

Determinar los coeficientes $b_{1,2}$.

35. Consideramos las funcionales siguiente definida sobre $L^2(R, dx)$:

$$\begin{aligned} L_1 f &= f(0) \\ L_2 f &= \int_{-1}^{1} t\ f(t)\ dt \\ L_3 f &= \int_{0}^{1} f(t)\ dt \\ L_4 f &= \int_{0}^{1} \frac{1}{t}\ f(t)\ dt \\ L_5 f &= \int_{0}^{1} |f(t)\ |\, dt \end{aligned}$$

Verificar en cada caso si la funcional es lineal y continua. Y en caso que la funcional es continua, hallar su norma.

36. Sea l^2, el espacio de Hilbert de las sucesiones $x = (x_0, x_1, x_2, ...)$ con $x_i \in C$ y tal que

$$\sum_{i \in N} |x_i|^2 < \infty$$

El producto escalar en l^2 es definido por

$$< x|y >= \sum_{i \in N} x_i^* y_i$$

Podemos usar una matriz infinita $(t_{ij})_{i,j \in N}$ para definir un operador lineal de l^2 en l^2. La definición de tal operador es la siguiente:

$$(Tx)_i = \sum_{j \in N} t_{ij} x_j$$

En este ejercicio, vamos a considerar el operador definido por la matriz infinita siguiente:

$$t_{ij} = 0 \text{ si } j \neq i + 1$$

$$t_{i,i+1} = \tau_i$$

donde (τ_i) es una sucesión acotada. Eso significa que existe un supremum (maximo superior) a esta sucesión. Matemáticamente eso va a traducirse por el siguiente hecho:

(τ_i) es una sucesión acotada $\Rightarrow \exists M$ tal que

$$M = \sup_{i \in N} |\tau_i|$$

(1) Usando esta propiedad, probar que el operador T así definido es acotado.

(2) Hallar su norma $||T||$.

(3) Hallar el adjunto del operador T.

37. Consideramos el espacio R^2 y podemos escribir sus elementos como vectores columna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_{1,2} \in R$$

Este espacio puede tener un producto escalar:

$$\langle x|y\rangle = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Como R^2 es de dimensión finita, R^2 es un espacio de Hilbert. Determinar la expresión de la norma de un operador lineal en este espacio y observar que todos los operadores lineales en R^2 son acotados.

38. Sea un espacio de Hilbert H, y dos elementos de H fijos y y z. Consideramos el operador A definido como

$$Ax = \langle y|x\rangle\, z$$

para $x \in H$. Probar que A es acotado y hallar su norma y su adjunto.

39. Buscar los adjuntos de los operadores lineales acotados definidos de la siguiente manera sobre $L^2([0,1], dx)$:

- $[A_1 f](x) = \int_0^x f(t)dt$
- $[A_2 f](x) = x f(x)$
- $[A_3 f](x) = \int_0^1 x f(t)dt$
- $[A_4 f](x) = \int_0^x t f(t)dt$

40. Sea $H = L^2([-\pi, \pi], dx)$, consideramos los operadores definido por

$$(P_n f)(x) = \frac{\cos nx}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy \;\; \cos ny \quad f(y)$$

para $n \in N^*$, probar que

- $\|P_n\| = 1$
- P_n es un proyector ortogonal
- $P_n P_m = \delta_{nm} P_n$

41. Sobre $L^2(R, dx)$, definimos los operadores ,

$$\begin{aligned} (P_+ f)(x) &= \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ (P_- f)(x) &= \begin{cases} 0 & x > 0 \\ f(x) & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Probar que $P_\pm$ son proyectores ortogonales y que

$$\begin{aligned} P_+ P_- &= P_- P_+ = 0 \\ P_+ + P_- &= I \end{aligned}$$

42. Verificar si podemos encontrar una función $\beta(x) \in C^\infty$ tal que los operadores $T_\pm$ definido como

$$\begin{aligned} (T_+ f)(x) &= \beta(x) \left[\beta(x) f(x) + \beta(-x) f(-x)\right] \\ (T_- f)(x) &= \beta(-x) \left[\beta(-x) f(x) - \beta(x) f(-x)\right] \end{aligned}$$

sean proyectores ortogonales y satisfaciendo las 3 condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 0 & x < -1 \end{cases} \\ T_+ T_- &= T_- T_+ = 0 \\ T_+ + T_- &= I \end{aligned}$$

43. Hallar el espectro del operador de multiplicación M_g definido sobre $L^2(R, dx)$ por las siguientes funciónes

- $g_1(x) = x^2$
- $g_2(x) = e^{-x^2}$
- $g_3(x) = \frac{3e^{-|x|}}{1+x^2}$
- $g_4(x) = \frac{4}{1+x^2}$

44. Misma pregunta que el ejercicio anterior pero cuando M_g es definido sobre $L^2([0,1], dx)$

45. Obtener el espectro del operador H, hamiltoniano del oscilator armónico cuántico:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

Probar que H es autoadjunto sobre $L^2(R, dx)$ y obtener su decomposición espectral. Usarlo para resolver la siguiente ecuación

$$Hf(x) + \alpha f(x) = g(x)$$

con $\alpha > 0$. Expresar la solución en termino de las funciones de Hermite.

46. Sea un operador lineal A sobre un espacio de Hilbert, probar que si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$, entonces, $\forall \epsilon > 0$, podemos encontrar un $f \in D(A)$ con $\|f\| = 1$ tal que
$$\|(A - \lambda I)\, f\| < \epsilon$$

47. Sabemos que el operador
$$A = i\frac{d}{dx}$$
en $L^2(R, dx)$ es autoadjunto en un dominio adecuado y su espectro es caracterizado por $\sigma(A) = R$ y $\sigma_p(A) = \emptyset$. Usando el ejercicio anterior; $\forall \lambda \in R$ y $\forall \epsilon > 0$, existe un vector f de norma 1 en $D(A)$ tal que
$$\|(A - \lambda I)\, f\| < \epsilon$$
Construir este vector.

48. Sea A un operador lineal positivo. Probar que $(A - \lambda)^{-1}$ existe si $\lambda < 0$

49. Consideramos el operador T definido sobre $L^2(R, dx)$
$$T = -\frac{d^2}{dx^2}$$
   - Hallar T^*
   - ¿T es autoadjunto?
   - ¿T es esencialmente autoadjunto?
   - Hallar su espectro ($\sigma(T)$)

50. En el espacio de Hilbert l^2, definimos los operadores de creación y de aniquilación a y a^* de la manera siguiente: esos dos operadores tienen un dominio común
$$D = D(a) = D(a^*) = \left\{ x \in l^2 \text{t.q.} \sum_n n\,|x_n|^2 < \infty \right\}$$
y sus acciones sobre los vectores $x = (x_0, x_1, x_2, ...)$ son dadas por
$$\begin{aligned} ax &= (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, ...) \\ a^*x &= (0, x_0, \sqrt{2}x_1, \sqrt{3}x_2, ..) \end{aligned}$$

Introducimos los vectores $\varphi_n (n \in N)$, definidos por

$$(\varphi_n)_i = \delta_{ni}$$

Esos vectores forman una base ortonormal de l^2. El acción de a y a^* sobre esos vectores es

$$\begin{aligned} a\varphi_0 &= 0 \\ a\varphi_n &= \sqrt{n}\varphi_{n-1} \\ a^*\varphi_n &= \sqrt{n+1}\varphi_{n+1} \end{aligned}$$

Probar que:

- a y a^* son bien definidos sobre D
- a^* es el adjunto de a
- a es el adjunto de a^*
- $\sigma_p(a) = C$
- $\sigma_p(a^*) = \emptyset$
- En la 4° pregunta, ustedes, en principio, construirán los vectores propios de a. Escribir esos vectores propios en términos de los vectores φ_n definido arriba y normalizarlos a 1. Esos estados son los estados coherentes del oscilador armónico.