Métodos Matemáticos II

Dr. David Delépine [1]

Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato
Loma del Bosque, N 103
Col. Lomas del Campestre
CP-37150 Léon, Gto

Noviembre 11, 2003

[1] email: delepine@fisica.ugto.mx; tel: ext. 8424

Contenido

Capitulo 1

Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales son de uso cotidiano para los físicos como por los ingenieros y sin importa cual es su especialidad. El tema de este curso es de dar el herramienta matemático para poder resolver las ecuaciones lineales las más comunes de la física clásica y cuántica. Así este curso es primero un curso de matemáticas pero como su destino son estudiantes en física o ingeniera en física, tratamos siempre de ver las aplicaciones en física clásica o cuántica de los diferentes métodos matemáticos que vamos a estudiar al largo de este semestre.

El objectivo que los estudientes tienen que poder complir al fin des este curso es de poder resolver cualquier tipo de ecuaciones diferenciales lineales mas comunes o mismo si todavia no conocen algunas funciones especiales como funciones de Bessel o armónicas esféricas para llegar a la solución final de la ecuación diferencial, saber cual metodo usar para simplificar el problema y en muchas veces poder llegar al resultado final.

El tema de este curso va de la clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales a la determinación de las condiciones de unicidad de la solución y resolución de esas ecuaciones diferenciales, de algunas transformadas integrales (las más utiles por la resolución de ecuaciones diferenciales parciales) tal que transformación de Fourier y de Laplace hasta los polinomios ortogonales (Legendre, Hermite y Laguerre). La parte que no esta incluida en este curso es la parte funciones especiales como armónicas esféricas o funciones de Bessel. Esas funciones especiales y su uso en la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales es el tema del curso de métodos matemáticos III.

La sección 2 es para recordar las propriedades de geometría vectorial y diferencial necesarias por las secciones siguientes.

La sección 3 servirá para dar ejemplos de los principales tipos de ecuaciones diferenciales de la física clásica.

La sección 4 es para recordar a los estudiantes las propiedades fundamentales de las series e integrales de Fourier, necesarias para resolver las ecuaciones diferenciales. En la sección 5, clasificamos las ecuaciones diferenciales parciales lineales en 3 categorias y estudiamos para cada categoria, cuales son las condiciones de unicidad de las soluciones. También introducimos la función de Green del Laplaciano y estudiamos unas propiedades de las funciones armónicas ($\equiv$ solución de la ecuación de Laplace). En la sección 6 damos el método general para resolver esas ecuaciones diferenciales. De un manera, este capitulo es el capitulo central al temario del curso. En este capitulo, ponemos todos los herramientas estudiados anteriormente en aplicación a la resolución de los ecuaciones diferenciales parciales.

En la sección 7 estudiamos unos métodos para resolver ecuaciones diferenciales por ejemplo, el método de la función de Green que generalisamos por cualquier operador diferencial y unos metodos de transformación integral (por ejemplo, Fourier o Laplace) que nos permite de transformar una ecuación diferenciale parciale en una ecuación diferencial ordinaria, mucho más facil de resolver. También, recordamos como usar el método de Wronsky para encontrar soluciones particulares a una ecuación diferencial ordinaria.

La sección 8 nos ayuda a introducir la relación muy estrecha entre geometria de los problemas y los métodos de resolución de esas ecuaciones diferenciales y su relación con unos grupo de simetría ligado intrinsicamente a la geometria del problema y la relaciones entre las funciones especiales y los diferentes tipos de geometría que podemos encontrar en física. Eso va servirnos de introducción al estudio de las funciones especiales.

Como el contexto natural para estudiar las funciones especiales y en particular los polinomios ortogonales es el espacio de Hilbert, la sección 9 es dedicada al estudio y a la definición de nociones fundamentales como distancia, norma, convergencia y producto escalar. Esas nociones van a conducirnos a introducir la noción de espacio de Hilbert de dimensión infinita y finita[1].

Los 4 capitulos siguientes (de la sección 10 a 13) son completamente dedicados al estudio de los polinomios ortogonales los mas utiles para los físicos o ingenieros, a saber polinomios de Legendre , de Hermite y de Laguerre. Cada ves, vemos unos ejemplo de uso de esos polinomios en problema concreto de física como el problema del oscillator armónico para las funciones de Hermite o la resolución de la ecuación de Schrodinger para el electrón en el átomo de hidrógeno para los polinomios de Laguerre.

La sección 14 contiene una serie de ejercicios sobre todo el curso. Esos ejercicios son ejercicios modelos y el estudiante puede buscar en la literatura (ver bibliografia) mas ejercicios. El objectivo de esta sección es de incitar los estudientes a poner en práctica el contenido de los capítulos anteriores. Muchas veces, las soluciones de esos mismos ejercicios estan a dentro de esas mismas notas.

[1]El caso de dimensión finita, fue estudiado en detalle en el curso de algebra lineal

Capitulo 2

Nociones de geometría diferencial y vectorial.

2.1 Propiedades tensoriales del gradiente

Consideremos un campo escalar $f(x)$ definido sobre R^3 . Si hacemos una translacion infinitesimal:

$$\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}' = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{\epsilon}, \tag{2.1}$$

tenemos que $f \to f'$ con $f'(\overrightarrow{x}', t) = f(\overrightarrow{x}, t)$, o de otra manera, $f'(\overrightarrow{x}, t) = f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{\epsilon}, t)$. El cambio (o variación) del campo escalar por la translación infinitesimal se escribe

$$\begin{aligned} f'(\overrightarrow{x}, t) - f(\overrightarrow{x}, t) &= f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{\epsilon}, t) - f(\overrightarrow{x}, t) \\ &= \epsilon^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \epsilon^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \epsilon^3 \frac{\partial f}{\partial x^3} + ... \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde los términos despreciables son pequeños comparado a $\sqrt{(\epsilon^1)^2 + (\epsilon^2)^2 + (\epsilon^3)^2}$.

Los términos lineales en $\overrightarrow{\epsilon}$ son el producto escalar entre el vector $\overrightarrow{\epsilon}$ y de un vector $(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}) \equiv \overrightarrow{grad}\ f \equiv \overrightarrow{\nabla} f$ llamado el gradiente de f.

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{\epsilon}, t) - f(\overrightarrow{x}, t) = (\overrightarrow{grad}\ f | \overrightarrow{\epsilon}) + ... \tag{2.3}$$

Propriedades:

- $\overrightarrow{\nabla} f$ se transforma como un vector "covariante" sobre rotacion ($R^i{}_j$):

$$x^i \to x^{'i} = R^i{}_j x^j \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \to \frac{\partial}{\partial x'^i} = R_i{}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.4}$$

Así $\overrightarrow{x}$ y $\overrightarrow{\nabla}$ se transforma de manera inversa uno del otro. Este propiedad no importa en el caso de las rotaciones en R^3 por que en este caso la métrica que definio la nocion de distancia es la matriz identidad (ver punto siguiente) pero en el caso de la generalización del gradiente a las transformaciones de Lorentz, este propriedad es muy importante!!

- grupo de las rotaciones deja invariant el producto scalar definido como siguiente[1]:

$$(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}) \equiv x^i y^j g_{ij} \tag{2.5}$$

donde g_{ij} es la métrica del espacio considerado. En el caso de R^3 y del grupo de las rotaciones, $g_{ij} = \delta_{ij}$. Pero en el caso del espacio de Minkowsky y de las transformaciones de Lorentz (*ver curso de relatividad especial*), la matriz $g_{\mu\nu}$ es dada por

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

- Toda este discusión se generaliza muy fácilmente en el caso de las transformaciones de Lorentz (relatividad especial) sobre M^4 y puedemos definir un cuadrivector gradiente "covariante":

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \overrightarrow{\nabla}\right) \tag{2.6}$$

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\overrightarrow{\nabla}\right) \tag{2.7}$$

- Por definición propia, los operatores $\overrightarrow{\nabla}$ y ∂_μ son íntimamente relacionado al los "generadores infinitesimales" del grupo de los translaciones respectivamente definida sobre R^3 o M^4.
- A partir de $\overrightarrow{\nabla}$ y ∂_μ, puedemos construir otros campos vectoriales o scalares:
  - sobre R^3, si $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x}, t)$ es un campo vectorial, puedemos definir los campos siguiente usando $\overrightarrow{\nabla}$,

[1] en esas notas, usamos siempre la convención de hacer la suma sobre los índices que se repiten (en el caso que no hay una suma, estaría escrito claramente en el texto).

a) El rotacional de $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)$

$$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{x},t) \equiv \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t) = \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{v} \tag{2.8}$$

$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{x},t)$ es el rotacional de $\overrightarrow{v}$ y es un campo vectorial. Otra manera de escribirlo, $w^k = \epsilon^{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x^l}$ donde ϵ^{klm} es el tensor completamente antisimétrico y $\epsilon^{123} = +1$.

b) La divergencia de $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)$

$$s(\overrightarrow{x},t) \equiv \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t) \equiv (\overrightarrow{\nabla}|\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)) = div\,\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t) \tag{2.9}$$

es un campo scalar llamado divergencia de $\overrightarrow{v}$.

– sobre M^4, si A_μ es un cuadrivector covariant, tenemos

a) $A_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es un campo tensorial antisimétrico a 2 índices covariant.

b) $S \equiv \partial_\mu A^\mu$ es un campo escalar llamado cuadri-divergencia.

– Otros operatores que puedemos definir a partir del gradiente:

a) El Laplaciano

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla} \equiv div\ \overrightarrow{grad} \equiv \triangle, \tag{2.10}$$

definiendo un campo scalar. Este operator se llama el Laplaciano y es muy importante en física por que es invariante sobre las rotaciones.

b) El D'Alembertiano

$$\partial_\mu \partial^\mu \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle, \tag{2.11}$$

también esta definiendo un campo escalar sobre el grupo de las transformaciones de Lorentz y se llama el D'Alembertiano.

2.2 Gradiente, rotacional y divergencia

En esta sección, por simplicidad, vamos a limitarnos al caso de R^3. Es un bueno ejercicio de generalizarlo a M^4 o R^n.

Significado geométrico

(A) Rotacional

Consideramos el campo vectorial $\overrightarrow{u}(x)$ y C, un circuito cerrado.

Vamos a llamar la "*circulación de* $\overrightarrow{u}$ *alrededor de* C", la integral curvilínea

$$\oint (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl}) \tag{2.12}$$

donde $\overrightarrow{dl}$ designa el traslado infinitesimal a lo largo del circuito C.

Si S es la superficie de la área Σ delimitada por el circuito C y $\overrightarrow{n}$, la normal (unidad) a Σ, tenemos, por definición:

$$(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u}|\overrightarrow{n}) = \lim_{S\to 0} \frac{\oint(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl})}{S} \tag{2.13}$$

(B) Divergencia.

Tenemos que $\overrightarrow{u}$ es un campo vectorial , Σ una superficie cerrada y V el volumen contenido dentro de Σ. Llamamos e"*el flux saliendo a través de* Σ", la cuantidad $\Phi_\Sigma(\overrightarrow{u})$ definida como

$$\Phi_\Sigma(\overrightarrow{u}) = \iint_\Sigma (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{n})d\sigma = \iint_\Sigma (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dS}) \tag{2.14}$$

donde $\overrightarrow{dS}$ es el elemento de superficie orientado.

Por definición, la divergencia es:

$$div(\overrightarrow{u}) = \lim_{V\to 0} \frac{\Phi_\Sigma(\overrightarrow{u})}{V} \tag{2.15}$$

(C) Consecuencias

- $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u}$ es un pseudo-vector o vector axial.

-$div(\overrightarrow{u})$ es un scalar.

Cálculo del rotacional

Consideramos un circuito rectangular ABCD, de dimensiones infinitesimales δ_2,δ_3 y situado en el plano $x_1 = a_1$ y de lados paralelos a los ejes x_2 y x_3. El punto (a_1, a_2, a_3) es el centro de eso rectángulo. Podemos fácilmente calcular la circulación a lo largo de ese rectángulo ABCD.

$$\begin{aligned}\oint_{ABCD} (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl}) &= \int_A^B u_2 dx_2 + \int_B^C u_3 dx_3 + \int_C^D u_2 dx_2 + \int_D^A u_3 dx_3 \qquad (2.16)\\ &= \int_{a_3-\frac{1}{2}\delta_3}^{a_3+\frac{1}{2}\delta_3} dx_3 \left\{ u_3(a_1,a_2 + \frac{1}{2}\delta_2, x_3) - u_3(a_1,a_2 - \frac{1}{2}\delta_2, x_3) \right\} \\ &\quad + \int_{a_2-\frac{1}{2}\delta_2}^{a_2+\frac{1}{2}\delta_2} dx_2 \left\{ u_3(a_1,x_2, a_3 - \frac{1}{2}\delta_3) - u_3(a_1,x_2, a_3 + \frac{1}{2}\delta_3) \right\}\end{aligned}$$

Usando

$$\begin{aligned}\delta_2 &\ll 1 \\ &\Rightarrow \frac{u_3(a_1,a_2 + \frac{1}{2}\delta_2, x_3) - u_3(a_1,a_2 - \frac{1}{2}\delta_2, x_3)}{\delta_2} \to \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(a_1, a_2, x_3) \qquad (2.17)\\ \delta_3 &\ll 1 \\ &\Rightarrow \int_{a_3-\frac{1}{2}\delta_3}^{a_3+\frac{1}{2}\delta_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(a_1, a_2, x_3) dx_3 \to \delta_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(a_1, a_2, a_3) \qquad (2.18)\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\oint_{ABCD} (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl}) = \delta_2\delta_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)\Bigg|_{(a_1,a_2,a_3)} \qquad (2.19)$$

Aplicando la definición del rotacional y tomando el límite $\delta_2\delta_3 \to 0$, tenemos

$$\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u}\right)_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \qquad (2.20)$$

Por los otros componentes, podemos proceder de la misma manera. Una manera fácil de memorizar la expresión del rotacional en coordenadas cartesianas y de calcular el determinante de la matriz siguiente:

$$\begin{vmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \widehat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio:

Calcular $\oint_{ABC}(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl})$ y probar que

$$\oint_{ABC}(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl}) = S(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u}|\overrightarrow{n})$$

con S la superficie del triángulo ABC.

Pistas: usar los resultados procedentes y

(1) $\oint_{ABC}(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl}) = \oint_{OBC}(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl}) + \oint_{OCA}(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl}) + \oint_{OAB}(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{dl})$.

(2) *expresar el área de OBC, OCA y OAB en términos de los componentes de $\overrightarrow{n}$ y de S.*

Cálculo de la divergencia

Consideramos un paralelipipedo infinitesimal de lados δ_1, δ_2 y δ_3. La contribucion al flux saliendo de $\overrightarrow{u}$ a través de los lados perpendiculares al eje x_1, $\Phi_1(\overrightarrow{u})$ vale

$$\Phi_1(\overrightarrow{u}) = \iint dx_2 dx_3 \left\{ u_1(a_1 + \frac{1}{2}\delta_1, x_2, x_3) - u_1(a_1 - \frac{1}{2}\delta_1, x_2, x_3 \right\}$$

Tomando el límite $\delta_1 \to 0$, obtenemos

$$\frac{\Phi_1(\overrightarrow{u})}{\delta_1\delta_2\delta_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \tag{2.21}$$

Usando la definición de la divergencia y sumando sobre los contribuciones al flux saliendo de $\overrightarrow{u}$ de todos los lados, tenemos

$$div\,\overrightarrow{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{2.22}$$

2.3 Identidades importantes

Lema de Poincarė

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ f) &= 0 \qquad (2.23)\\ div(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{u}) &= 0 \qquad (2.24)\end{aligned}$$

El punto importante del lema de Poincare es que,**localmente**[2], tiene una recíproca:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u} &= 0 \Rightarrow \exists\varphi \text{ un campo scalar tal que } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{grad}\varphi \qquad (2.25)\\ div\,\overrightarrow{u} &= 0 \Rightarrow \exists\overrightarrow{A} \text{ un campo vectorial tal que } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} \qquad (2.26)\end{aligned}$$

Esos campos se llaman respectivamente potential escalar (para φ) y potencial vector (para $\overrightarrow{A}$).

Un campo vectorial $\overrightarrow{u}$ se llamariá

(a) irrotacional si $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u} = 0$

(b) solenoidal si $div\,\overrightarrow{u} = 0$

Otra consecuencia importante del lema de Poincare es **el teorema de Helmholtz**:

Un campo vectorial $\overrightarrow{u}$, suficientemente regular y nulo al infinito es la suma de un campo irrotacional y de un campo solenoidal:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{grad}\varphi + \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}$$

Otras identidades:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{grad}(fg) &= f\ \overrightarrow{grad}g + g\ \overrightarrow{grad}f \qquad (2.27)\\ \overrightarrow{rot}(f\overrightarrow{u}) &= f\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{grad}f \times \overrightarrow{u} \qquad (2.28)\\ div(f\overrightarrow{u}) &= f\ div(\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{grad}f|\overrightarrow{u}) \qquad (2.29)\\ div(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}) &= (\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v}) \qquad (2.30)\\ \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u}) &= \overrightarrow{grad}(div\,\overrightarrow{u}) - \triangle\overrightarrow{u} \qquad (2.31)\end{aligned}$$

[2]localmente significa que la recíproca del lema de Poincare es válida si en cada punto $\overrightarrow{x}$ del conjunto donde la función es definida se puede construir un rectángulo centrado en el punto $\overrightarrow{x}$ y interior al dominio de definición de la función. Por ejemplo, si el dominio de definición es $R^3\backslash\{0\}$, el lema de Poincare no tiene recíproca

2.4 Teoremas integrales

(A) Integral de línea de un gradiente:

$$\int_P^Q (\overrightarrow{grad} f | d\overrightarrow{l}) = f(Q) - f(P) \tag{2.32}$$

(B) Teorema de Stokes:

$$\iint_\Sigma (\overrightarrow{rot}\overrightarrow{u} | \overrightarrow{n}) d\sigma = \int_{\partial\Sigma} (\overrightarrow{u} | d\overrightarrow{l}) \tag{2.33}$$

(C) Teorema de Gauss:

$$\iiint_\Omega div\overrightarrow{u}\ d\tau = \iint_{\partial\Omega} (\overrightarrow{u} | \overrightarrow{n}) d\sigma \tag{2.34}$$

Aplicación: **<u>idendidad de Green</u>** que vamos a utilizar cuando vamos a estudiar la ecuación de Laplace.

Tenemos $\Sigma = \partial\Omega$ una superficie cerrada cercando un volumen Ω. f y g son dos funciones de clase C^2 sobre Ω. En este caso, usando las identitades procedentes, tenemos

$$div(f\overrightarrow{\nabla g}) = f\triangle g + (\overrightarrow{\nabla f} | \overrightarrow{\nabla g}) \tag{2.35}$$

$$div(g\overrightarrow{\nabla f}) = g\triangle f + (\overrightarrow{\nabla g} | \overrightarrow{\nabla f}) \tag{2.36}$$

$$\Rightarrow div(f\,\overrightarrow{\nabla g} - g\overrightarrow{\nabla f}) = f\triangle g - g\triangle f \tag{2.37}$$

Integramos dentro de Ω y usando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\Phi_{\partial\Omega}(f\,\overrightarrow{\nabla g} - g\overrightarrow{\nabla f}) = \iiint_\Omega d\tau\,(f\triangle g - g\triangle f) \tag{2.38}$$

y como podemos expresar el flux $\Phi_{\partial\Omega}$ de la manera siguiente:

$$\Phi_{\partial\Omega}(f\,\overrightarrow{\nabla g} - g\overrightarrow{\nabla f}) = \iint_{\partial\Omega} (f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma \tag{2.39}$$

donde $\frac{\partial g}{\partial n}$ es la diferencial en la dirección de la normal a la superficie $\partial\Omega$.

Entonces, obtenemos el identitad de Green:

$$\iint_{\partial\Omega} (f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma = \iiint_\Omega d\tau\,(f\triangle g - g\triangle f) \tag{2.40}$$

Esta relación va a estar muy útil cuando vamos a estudiar las funciones armónicas (solución de la ecuación de Laplace, $\triangle g = \triangle f = 0$ dentro de Ω.)

2.5 Cálculó en coordenadas no-cartesianas

Muchas veces las simetrías del sistema sobre investigación nos hacen usar sistemas de coordenadas no cartesianas. Por ejemplo,

- coordenadas polares planas.
- coordenadas polares esféricas.
- coordenadas polares cilíndricas.

Todos esos sistemas de coordenadas tienen la propiedad de ser ortogonales. Un sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) en R^3 es ortogonal si satisface los 3 condiciones equivalentes siguientes:

1. en cada punto (ξ, η, ζ), las superficies de coordenadas ξ = constante, η =constante y ζ =constante son 2 a 2 ortogonales.
2. en cada punto (ξ, η, ζ), las normales $\widehat{e}_{\zeta,\xi,\eta}$ a las superficies de coordenadas ξ = constante, η =constante y ζ =constante son 2 a 2 ortogonales.
3. el elemento de línea[3] se escribio

$$ds^2 = g_\xi^2 d\xi^2 + g_\eta^2 d\eta^2 + g_\zeta^2 d\zeta^2 \tag{2.41}$$

   sin términos crusados como $d\zeta d\xi$.

Vamos a calcular los operadores gradiente, divergencia, laplaciano y rotacional en coordenadas ortogonales generalizadas (ξ, η, ζ). En este sistema de coordenadas, cualquier campo vectorial $\overrightarrow{u}$ va a poder escribirse como

$$\overrightarrow{u} = u_\xi \widehat{e}_\xi + u_\eta \widehat{e}_\eta + u_\zeta \widehat{e}_\zeta \tag{2.42}$$

2.5.1 Gradiente

Por eso, vamos a seguir el mismo método que antes. Consideramos un campo escalar f y calculamos la variación de f después de hacer la transformación $\xi \to \xi + d\xi$. En este caso, tenemos

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta && (2.43)\\ &= (\frac{1}{g_\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi}) g_\xi d\xi + (\frac{1}{g_\eta}\frac{\partial f}{\partial \eta}) g_\eta d\eta + (\frac{1}{g_\zeta}\frac{\partial f}{\partial \xi}) g_\zeta d\zeta && (2.44)\\ &\equiv (\overrightarrow{grad} f \mid \overrightarrow{\delta}) && (2.45) \end{aligned}$$

[3]es importante recordar que $g_\xi d\xi$ representa la distancia entre la superficie de coordenada $\xi = \xi_0$ y la superficie vecina $\xi = \xi_0 + d\xi$.

Entonces, tenemos

$$\overrightarrow{grad} f = (\frac{1}{g_\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi})\widehat{e}_\xi + (\frac{1}{g_\eta}\frac{\partial f}{\partial \eta})\widehat{e}_\eta + (\frac{1}{g_\zeta}\frac{\partial f}{\partial \xi})\widehat{e}_\zeta \tag{2.46}$$

2.5.2 Divergencia

Vamos a proceder de la misma forma que antes, aplicando la definición de la divergencia a un paralelipipedo de lados $(g_{xi}d\xi, g_\eta d\eta, g_\zeta d\zeta)$, centrado en el punto ξ, η, ζ. Procediendo así, obtenemos el resultado siguiente:

$$div \overrightarrow{u} = \frac{1}{g_\xi g_\eta g_\zeta}\{\frac{\partial}{\partial \xi}(g_\eta g_\zeta u_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(g_\xi g_\zeta u_\eta) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(g_\eta g_\xi u_\zeta)\} \tag{2.47}$$

2.5.3 Laplaciano

Obtenemos directamente el laplaciano de su definición en términos de gradiente y divergencia.

$$\triangle f = \frac{1}{g_\xi g_\eta g_\zeta}\{\frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{g_\eta g_\zeta}{g_\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{g_\zeta g_\xi}{g_\eta}\frac{\partial f}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\frac{g_\eta g_\xi}{g_\zeta}\frac{\partial f}{\partial \zeta})\} \tag{2.48}$$

2.5.4 Rotacional

Por ser completo, damos el resultado por el rotacional. Para obtenerlo, es suficiente de usar el mismo método que en los capítulos procedentes.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{u} &= \frac{\widehat{e}_\xi}{g_\eta g_\zeta}(\frac{\partial(g_\zeta u_\zeta)}{\partial \eta} - \frac{\partial(g_\eta u_\eta)}{\partial \zeta}) + \frac{\widehat{e}_\eta}{g_\xi g_\zeta}(\frac{\partial(g_\xi u_\xi)}{\partial \zeta} - \frac{\partial(g_\zeta u_\zeta)}{\partial \xi}) \\ & \frac{\widehat{e}_\zeta}{g_\eta g_\xi}(\frac{\partial(g_\eta u_\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial(g_\xi u_\xi)}{\partial \eta}) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Capitulo 3

Ecuaciones diferenciales parciales lineales de la física clásica

3.1 La cuerda vibrante y sus generalización

Tenemos una cuerda elástica estirada de tensión T y de masa μ para unidad de longitud. Esta cuerda puede hacer un movimiento de vibración en el plano vertical. Escogimos por eje x, la posición de quilibrio de la cuerda (cuerda en reposo) y le llamamos $w(x,t)$ la separación respecto a la posición de equilibrio del punto x al tiempo t.

Además, vamos a suponer que una fuerza transversal f para unidad de longitud actúa sobre la cuerda (por ejemplo la gravedad).

Tomamos la sección $(x, x+dx)$ de la cuerda:

- su masa es μdx
- su aceleración (solamente es transversal): $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.
- la fuerza exterior transversal $f dx$
- la componente transversal de la tensión en x: $-T\frac{\partial w}{\partial x}$, por que $\frac{\partial w}{\partial x}$ es el coeficiente angular de la tangente a la cuerda en el punto x.
- la componente transversal de la tensión en $x+dx$:

$$T\frac{\partial w}{\partial x}(x+dx) = T(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx)$$

Con todo eso, podemos muy fácilmente escribir las ecuaciones de Newton y obtenemos:

$$(\mu\ dx)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ dx + f\ dx \tag{3.1}$$

Podemos simplificar el expresión y obtenemos la tradicional ecuación de la cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{f}{T} = 0 \tag{3.2}$$

donde $c^2 \equiv T/\mu$ contiene toda la información sobre las propiedades físicas de la cuerda.c tiene la dimensión de una velocidad y vamos a ver que efectivamente c es la velocidad de propagación de una deformación al largo de la cuerda.

Para $f = 0$, tenemos la ecuación clásica de la cuerda vibrante:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.3}$$

3.1.1 Generalización

En el caso de una membrana elástica de densitad μ y de tensión uniforme T con una fuerza transversal f por unidad de superficie, podemos muy fácilmente obtener la ecuación de Newton correspondiente a las vibraciones de la membrana.

Por eso, escogimos el plano (x, y) como la posición de equilibrio de la membrana y llamamos $w(x, y, t)$ la diferencia en el punto (x, y) respecto a su posición de equilibrio.

Tenemos un rectángulo $dx\ dy$ y escribimos las ecuaciónes de Newton. Nadamas tenemos que recordar que la tracción transversal en la dirección x es igual a

$$dy\ T\{\frac{\partial w}{\partial x}(x + dx, y) - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y)\} = T\ dy\ dx\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

De la misma manera, tenemos por la tracción transversal en la dirección y:

$$T\ dx\ dy\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{3.5}$$

La ecuación de Newton es

$$\Rightarrow \mu \; dx \; dy \; \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \; dx \; dy \; (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + f \; dx \; dy \tag{3.6}$$

En el caso $f = 0$, tenemos

$$\triangle_2 \; w - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.7}$$

Estas ecuaciónes van a describir ondas acusticas, electromagneticas, sismicas, ...

3.2 Ecuación del calor

Consideramos un medio homogeno de masa μ (para unidad de volumen) y de calor específico c_v (para unidad de masa). Vamos a estudiar la propagación del calor en este medio y por eso lo consideramos como un fluído de densitad de corriente $\overrightarrow{Q}$. $w(x,t)$ es la temperatura al punto x al momento t.

Suponemos que una aportación de calor puede solamente aumentar la temperatura, es decir que vamos a no tomar en cuenta cualquier otro efecto.

En tal caso, la conservación de la energí a va a tomar la forma de una ecuación de continuidad. Para un volumen Ω, la aportación total de calor es igual al aumento de energía debido a la variación de la temperatura:

$$-\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{Q}.d\overrightarrow{S} = \iiint_{\Omega} \mu\ c_v \frac{\partial w}{\partial t}\ d\tau \tag{3.8}$$

El signo negativo proviene de la evalución del flux entrando.

Usando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\iiint_{\Omega} (\mu\ c_v \frac{\partial w}{\partial t} + div \overrightarrow{Q})\ d\tau \tag{3.9}$$

Como el volumen Ω es arbitrario, esta ley de conservación macroscópica tiene que ser válida también al nivel microscópico y tenemos

$$(\mu\ c_v \frac{\partial w}{\partial t} + div \overrightarrow{Q}) = 0 \tag{3.10}$$

Admitimos que el flux de calor $\overrightarrow{Q}$ es dirigido según la línea de la caída la más grande de temperatura, eso es decir que

$$\overrightarrow{Q} = -k\ \overrightarrow{grad}\ w \tag{3.11}$$

Esta hipótesis (que implica $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{Q} = 0$) supone que el medio es isotropo y es válida solamente en un dominio pequeno de variación de la temperatura. En los casos mas generales, k, llamada *conductividad térmica*, cambia con la temperatura y al fin, tenemos una ecuación no-lineal.

Suponiendo $k =$ constante, tenemos

$$\triangle w - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{3.12}$$

donde $\alpha = k/(\mu c_v)$. Es la ecuación tradicional del calor. Este ecuación sirve para describir muchos casos de fenómenos de difusión.

3.3 Ecuación de Laplace y sus generalizaciones

Si en el problema procedente, queremos describir la distribución del calor al equilibrio, tenemos que usar una solución estacionaria de la ecuación del calor, es decir independiente del tiempo.

$w(x)$ seria una solución estacionaria sí

$$\triangle w = 0 \tag{3.13}$$

Es la ecuación de Laplace. También esta ecuación se llama ecuación del potencial.

En presencia de fuentes, de densidad $\rho \equiv \rho(x, y)$, tenemos la ecuación inhomogena correspondiente, llamada *ecuación de Poisson*:

$$\triangle w = \rho \tag{3.14}$$

Otra ecuación similar a la ecuación de Laplace es la ecuación de Helmholtz:

$$\triangle u + k^2 \ u = 0 \tag{3.15}$$

Esta misma ecuación se encuentra también en mecánica cuántica (ecuación de Schrödinger para una partícula libre, por ejemplo).

Capitulo 4

Series e integrales de Fourier

4.1 Serie de Fourier

4.1.1 Motivaciones: principio de superposición

Serie e integrales de Fourier constituyen una técnica que permite usar la linearidad de un ecuación diferencial ordinaria o parcial, gracias al principio de superposición:

"Dada un ecuación diferencial, lineal en la función incognita y sus derivadas, cualquier combinación lineal de las soluciones es todavía una solución y la solución la mas general es una combinación lineal de soluciones particulares" (David Bernoulli)

Por ejemplo, la cuerda vibrante $F(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

Primero, vamos a buscar una solución factorizada: $F(x,t) = f(x)\ g(t)$,

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f^{''}(x) + k^2\ f(x) & = 0 \\ g^{''}(t) + c^2\ k^2\ g(t) & = 0 \end{array} \right. \tag{4.2}$$

con la misma constante k^2. Si tenemos $\frac{\partial F}{\partial t}|_{t=0} = 0$, tenemos una solución (ver capítulos siguientes):

$$F_k(x,t) = (A\sin(k\ x) + B\cos(k\ x))\cos(c\ k\ t) \tag{4.3}$$

Si, además x es limitado a un dominio acotado, tenemos una sucesión infinita $k_1, k_2, ...$ de solución.

$\Rightarrow$ Usando el principio de superposición, la solución general puede escribirse de la forma:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \ \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)) \cos(c \ k_n t) \tag{4.4}$$

Pero que sentido tenemos que dar a la suma infinita? Si consideramos una solución truncada $F_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} F_n(x,t)$. Para N suficientemente grande, esperamos que F_N se aproxime a la solución general, pero que sentido se va a dar a este concepto?

4.2 Aproximación en media cuadrática sobre un dominio acotado

Consideremos un dominio definido como $[-l, l]$ con los dos extremos identificadas (equivalente a un círculo de radio l/π).

Sobre este dominio, consideremos la familia de funciones siguientes:

$$u_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ l}} \tag{4.5}$$

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos(\frac{n\pi x}{l}) \text{ para } n = 1, 2, ... \tag{4.6}$$

$$v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin(\frac{n\pi x}{l}) \text{ para } n = 1, 2, ... \tag{4.7}$$

Podemos verificar muy facilmente que esas funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$\int_{-l}^{+l} u_m(x) u_n(x) \ dx = \delta_{mn} \tag{4.8}$$

$$\int_{-l}^{+l} v_m(x) v_n(x) \ dx = \delta_{mn} \tag{4.9}$$

$$\int_{-l}^{+l} v_m(x) u_n(x) \ dx = 0 \tag{4.10}$$

De este modo, cualquier combinación lineal $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \ u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \ v_n(x) \tag{4.11}$$

es una función periódica de período $2l$.

Para definir estas sumas infinitas, vamos a considerar la suma truncada $f_N(x)$:

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \ u_n(x) + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \ v_n(x) \tag{4.12}$$

Vamos a medir la separación entre f y f_N usando la <u>*diferencia cuadrática media*</u> Δ_N:

$$\Delta_N = \int_{-l}^{l} |f(x) - f_N(x)|^2 dx \tag{4.13}$$

Para N fijo, "aproximar f en media cuadrática" va a consistir en encontrar los coeficientes α_n y β_n que minimizan Δ_N lo más posible. Es claro que eso tiene sentido solamente si

$$\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx < \infty \tag{4.14}$$

Vamos a decir que $f(x)$ es un función de cuadrado integrable si

$$\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{4.15}$$

Estos coeficientes se calculan facilmente usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones $u_n(x)$ y $v_m(x)$. Calculando Δ_N y usando las definiciones de $u_n(x)$ y $v_m(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_N = \int |f(x)|^2 dx \quad &+ \quad \sum_{n=0}^{N} |A_n - \alpha_n|^2 - \sum_{n=0}^{N} |A_n|^2 \\ &+ \quad \sum_{n=1}^{N} |B_n - \beta_n|^2 - \sum_{n=1}^{N} |B_n|^2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde $A_n,\ B_n$ son definidos como

$$A_n = \int_{-l}^{l} \overline{u}_n(x)\ f(x)\ dx \tag{4.17}$$

$$B_n = \int_{-l}^{l} \overline{v}_n(x)\ f(x)\ dx \tag{4.18}$$

$$\tag{4.19}$$

Es muy fácil de demonstrar que Δ_N es minima cuando tenemos:

$$\alpha_n = A_n \tag{4.20}$$

$$\beta_n = B_n \tag{4.21}$$

Estos coeficentes son <u>*los coeficientes de Fourier de la función f*</u>.

4.2.1 Forma equivalente

También, en lugar de usar las funciones $u_n(x)$ o $v_n(x)$, podemos usar la representación en términos de la exponencial compleja y usar la serie de funciones $w_m(x)$ definida como:

$$w_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{im\pi x/l} \tag{4.22}$$

Podemas verificar que estas funciones satisfacen también las relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{-l}^{l} \overline{w}_m(x)\ w_n(x)\ dx = \delta_{mn} \tag{4.23}$$

Así, podemos definir los coeficientes de Fourier de la función f como los coeficientes C_m definido de la manera siguiente:

$$C_m = \int_{-l}^{l} \overline{w}_m(x)\ f(x)\ dx \tag{4.24}$$

Y formalmente, la función f va a poder escribirse como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\ w_n(x) \tag{4.25}$$

4.2.2 Propiedades.

1. Desigualdad de Bessel:

$$\sum_{-N}^{+N} |C_m|^2 \leq \int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx \tag{4.26}$$

2. Vamos a decir que f es completamente aproximable si f verifica uno de los condiciones equivalentes siguientes:

   (i) $\Delta_\infty(f) = 0$

   (ii) Igualdad de Parseval:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |C_m|^2 = \int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx \tag{4.27}$$

   (iii) $f = \lim_{N\to\infty} f_N$ en media cuadrática, lo que significa que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-l}^{l} |f(x) - \sum_{-N}^{+N} C_m w_m(x)|^2 dx = 0 \tag{4.28}$$

Y en este caso, vamos a poder escribir $f(x)$ como

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_m \; w_m(x) \tag{4.29}$$

3. Teorema:

   (i) cualquier función de cuadrado integrable es completamente aproximable.

   (ii) Si $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_m \; w_m(x)$ con $\sum_{-\infty}^{+\infty} |C_m|^2 < \infty$, entonces f es de cuadrado integrable y tenemos[1]

$$\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 dx < \infty \tag{4.30}$$

Todos esos resultados se simplifican mucho si introducimos el espacio de Hilbert $L^2([-l, l], dx)$. Por definición, el espacio de Hilbert es un conjunto de clase de equivalencia de las funciones de cuadrado integrables definidas sobre el dominio $[-l, +l]$.

La relación de equivalencia es

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \tag{4.31}$$

excepto sobre un conjunto de medida nula, es decir un conjunto "denombrable" de puntos.

Sobre este espacio, el producto escalar es definido como

$$(f|g) \equiv \int_{-l}^{l} \overline{f}(x) \; g(x) \; dx \tag{4.32}$$

Y la norma de una función $f \in L^2(] - l, l[, dx)$ es definida como

$$\|f\|^2 \equiv \int_{-l}^{l} |f(x)|^2 \; dx \tag{4.33}$$

Las relaciones de ortogonalidad de $\{u_m, v_m\}$ y $\{w_m\}$ significan que esos dos sistemas son bases ortonormales de este espacio de Hilbert $L^2([-l, l], dx)$. Por consecuencia, cualquier elemento $f \in L^2([-l, l], dx)$ puede escribirse de manera única como una combinación lineal de los vectores de la base.

[1] la integral tiene que estar tomada en el sentido del integral de Lebesgue (ver curso de calculo).

4.3 Convergencia puntual de la serie de Fourier

La llave de la convergencia puntual de la serie de Fourier va ser la regularidad de la función f: más regular es, más rapido sus coeficientes de Fourier C_m o $A_m,\ B_m$ decrecen en m.

Para ilustrar, esta propiedad vamos a considerar varios ejemplo para f.

1. f de clase $\mathcal{C}^1$, es decir que f y $f^{'}$ son contínuas y limitadas. Primero, vamos a hacer una integración por parte y obtenemos para los coeficientes de Fourier C_m:

$$\begin{aligned} \sqrt{2l}C_m &= \int_{-l}^{l} e^{-im\pi x/l} f(x)\ dx \\ &= \frac{e^{-im\pi x/l}}{-im\pi/l}\ f(x)|_{-l}^{l} + \frac{1}{im\pi/l}\int_{-l}^{l} e^{-im\pi x/l} f^{'}(x)\ dx \end{aligned} \tag{4.34}$$

Como el primer término es igual a cero, tenemos

$$C_m \leq \frac{1}{m}\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{l}{2}}\int_{-l}^{l} |f^{'}|\ dx = \frac{1}{m}M_1 \tag{4.35}$$

donde M_1 es independiente de m.

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |C_m|^2 \leq M_1^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^2} < \infty \tag{4.36}$$

2. f de clase $\mathcal{C}^2$. En este caso, vamos a poder hacer dos integraciones por partes y obtenemos

$$|C_m| \leq \frac{1}{\sqrt{2l}}(\frac{l}{m\pi})^2 \int_{-l}^{l} |f^{''}|dx = \frac{M_2}{m^2} \tag{4.37}$$

En consecuencias, (C_m) es "sumable" y la serie de Fourier convergería absolumente, es decir que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |C_m| \leq M_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m^2} < \infty \tag{4.38}$$

3. si $f \in \mathcal{C}^k \Rightarrow |C_m| \leq \frac{1}{m^k}M_k$

   En particular, si la función es de clase $\mathcal{C}^\infty$, los coeficientes C_m decrecen más rapidamente que cualquier potencia inverso de m(decimos que (C_m) es *una seguida a decrecimiento rapido*).

4. Si $f \in \mathcal{C}^0$ (es solamente continua), en este caso, f no tiene siempre una serie de Fourier convergente.

5. A fortiori, tenemos que esperar unas patologías si la función es discontinua.

   Por ejemplo, el fenómeno de Gibbs:

   En un punto de discontinuidad x_0, la suma truncada a N términos de la serie de Fourier NO tiende al valor $f(x_0)$ pero al valor $A\ f(x_0)$ con $A > 1.17$.

4.4 Integrales de Fourier

4.4.1 La transformación de Fourier

Tenemos $f(x)$ una función periódica, de periodo $2l$ y de cuadrado integrable sobre $[-l, l]$. De la sección precedente, sabemos que esta función tiene una serie de Fourier convergente "en el sentido L^2":

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n w_n(x) & (4.39) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} \frac{e^{-in\pi\xi/l}}{\sqrt{2l}} f(\xi) d\xi \right) \frac{e^{in\pi x/l}}{\sqrt{2l}} & (4.40) \end{aligned}$$

Que pasa si tomamos el límite $l \to \infty$?

Al limite, vamos a tener una función NO-periódica y de cuadrado integrable sobre R.

Vamos a definir $k_n = n\pi/l$, el parámetro k va cambiar de $-\infty$ hasta $+\infty$ por salto de longitud $\Delta k_n \equiv k_{n+1} - k_n = \pi/l$ y entonces $1/l = \Delta k_n/\pi$.

$\Rightarrow l \to \infty$, vamos a tener:

(i) la integral $\int_{-l}^{l}$ va a devenir $\int_{-\infty}^{\infty}$.

(ii) k_n va a tender a una variable continua k.

$f(x)$ va a devenir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-l}^{l} \frac{e^{-ik_n\xi}}{\sqrt{2\pi}} f(\xi) d\xi \right) \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}} \Delta k_n & (4.41) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k_n) \frac{e^{ik_n x}}{\sqrt{2\pi}} \Delta k_n & (4.42) \\ &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk & (4.43) \end{aligned}$$

suponiendo que el límite $l \to \infty$ existe!.

Obtenemos así los dos relaciones siguientes, que van a definir lo que llamamos la transformación de Fourier y su inverso:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-ikx} dx & (4.44) \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\ e^{ikx} dk & (4.45) \end{aligned}$$

<u>Notas</u>: encontramos también en la literatura otras convenciones tal que el intercambio entre e^{ikx} y e^{-ikx}, o de los factores numéricos pero siempre el producto de estos factores es igual a $1/2\pi$ (otra convención por ejemplo, tomar 1 y $1/2\pi$).

La definición se extiende imediatamente en dimensión $n > 1$ con la notacion usual del producto escalar en R^n, $(\overrightarrow{k}\,|\,\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i$.

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i(\overrightarrow{k}\,|\,\overrightarrow{x})} d^n x \tag{4.46}$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\ e^{i(\overrightarrow{k}\,|\,\overrightarrow{x})} d^n k \tag{4.47}$$

La pregunta natural que nos viene a la mente es determinar por cual clase de funciones f, la transformación de Fourier es valida. Para responder a esta duda, vamos a definir la clase $\mathcal{S}$ de Schwartz de la siguiente manera:

$$f \in \mathcal{S} \tag{4.48}$$

$\Leftrightarrow$

- $f \in \mathcal{C}$
- f y todas sus derivadas son a decrecimiento rápido, es decir que $\forall m, j$, tenemos
$$|x|^m |f^{(j)}| \to 0 \text{ para } |x| \to \infty \tag{4.49}$$

Para una función $f \in \mathcal{S}$, la integral definiendo su transformada de Fourier va a converger absolutamente y además $f \in L^2$, es decir que $\mathcal{S} \subset L^2$. Y tenemos también,

$$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S} \tag{4.50}$$

<u>Prova</u>:

(i) $f \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow \widehat{f}$ es a decrecimiento rápido, es decir que

$$\forall m, |k|^m |\widehat{f}| \to 0 \text{ para } k \to \infty \tag{4.51}$$

Para demostrar eso, es suficiente de integrar por partes la integral definiendo $\widehat{f}(k)$.

Como $f \in \mathcal{S}$, el termino todo integrado es cero y tenemos

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x) \, \frac{e^{-ikx}}{ik} dx \tag{4.52}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) \, \frac{e^{-ikx}}{(ik)^n} dx \tag{4.53}$$

(ii) f es a decrecimiento rápido $\Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{C}^{\infty}$.

Podemos derivar a bajo del signo de integración, lo que da

$$\frac{d\widehat{f}}{dk}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, (-ix) \, e^{-ikx} dx \tag{4.54}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n\widehat{f}}{dk^n}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, (-ix)^n \, e^{-ikx} dx \tag{4.55}$$

Todas esas integrales son absolutamente convergente, así la función $\widehat{f}$ es bien de clase $\mathcal{C}^{\infty}$.

Nos queda a determinar el dominio de definición de la transformación de Fourier.

Por eso, consideramos $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow \widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}$, entonces tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}(k) \, \widehat{g} \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(x) \, g(x) \, dx \tag{4.56}$$

Podemos permutar las integraciones en x y en k por que $f, g, \widehat{f}$ y $\widehat{g}$ son funciones de $\mathcal{S}$.

En particular, tomando $f = g$, obtenemos las relaciones de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}}(k) \, \widehat{g} \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(x) \, g(x) \, dx \tag{4.57}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \tag{4.58}$$

Podemos reconocer el producto escalar y la norma definida sobre el espacio de Hilbert $L^2(R, dx)$:

$$(f|g) = (\widehat{f}|\widehat{g}) \tag{4.59}$$
$$\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2 \tag{4.60}$$

Eso significa que la transformación de Fourier $f \to \widehat{f}$ es una aplicación unitaria (isomorfismo) de L^2 sobre L^2.

4.4.2 Teorema de convolución

$f, g \in \mathcal{S}$, podemos definir *el producto de convolución de* f *y* g. Por definición, el producto de convolución de f y g es dado por la relación siguiente:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\ g(y)dy \tag{4.61}$$

Si $f, g \in \mathcal{S}$, es fácil de demonstrar que $(f * g) \in \mathcal{S}$. Y tenemos el teorema siguiente muy importante en sus aplicaciones:

$$\sqrt{2\pi}\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g} \tag{4.62}$$
$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g} \tag{4.63}$$

La demonstración de esto teorema se hace muy fácilmente usando el hecho que podemos intercambiar los dos integrales.

Este teorema tiene muchas aplicaciones en física, en particular en la descripción matemática del proceso de medir, si tomamos en cuenta el incertidumbre estatística sobre los resultados medidos.

4.4.3 Significación intuitiva de la transformación de Fourier: la "función" δ de Dirac

Para darnos cuenta del papel de la transformación de Fourier, vamos a calcular dos casos particulares:

- una impulsión cuadrada.
- una gaussiana.

Transformada de Fourier de una impulsion cuadrada.

Consideramos la función $f_l(x)$ definida de la manera siguiente:

$$f_l(x) = \begin{cases} 0 & x < -l \\ 1 & -l \leq x \leq l \\ 0 & x > l \end{cases} \tag{4.64}$$

Podemos calcular muy fácilmente la transformada de Fourier:

$$\widehat{f}_l(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, l \frac{\sin kl}{kl} \tag{4.65}$$

Tenemos también que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_l(k) dk &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ con } t = kl & (4.66) \\ &= \sqrt{2\pi} & (4.67) \end{aligned}$$

Ahora, podemos tomar el límite $l \to \infty$:

- $f_l(x)$ va a tender a una impulsión infinita ($f_l(x) \to 1$).
- $\widehat{f}_l$ va a tender verso un pico infinitamente alto y infinitamente estrecho que vamos a notar $\sqrt{2\pi}\delta(k)$, donde δ es lo que llamamos usualmente la función δ de Dirac.

  $\delta(k)$ NO es una función en el sentido usual por que ella tiene que ser la función nula en todos los puntos excepto en cero donde ella vale el infinito!

  Además, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)\ dk = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_l(k)\ dk = 1 \tag{4.68}$$

  En hecho, la función δ de Dirac puede solamente definirse de manera correcta como una "medida" o una distribución. Ahora, vamos a definir la función δ por el límite:

$$\delta(k) = \lim_{l\to\infty} \frac{l}{\pi} \frac{\sin kl}{kl} \tag{4.69}$$

La transformada de Fourier de una gaussiana.

Consideramos una gaussiana $f_a(x)$ de altura 1 y de anchura $1/a$:

$$f_a(x) = e^{-a^2x^2/2} \tag{4.70}$$

Su transformada de Fourier tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2/2} e^{-ikx} dx & (4.71) \\ &= \frac{1}{a} e^{-k^2/2a^2} & (4.72) \end{aligned}$$

Así, $\widehat{f}_a(k)$ es igual una gaussiana pero de altura $1/a$ y de anchura a.

Ahora, pasamos al límite $a \to 0$, entonces, tenemos

- $f_a(x) \to 1$.
- $\widehat{f}_a(k)$ va a tender verso una gaussiana infinitamente alta y infinitamente estrecha.

$$\widehat{f}_a(k) \to \sqrt{2\pi}\delta \tag{4.73}$$

Nos queda a verificar que δ es bien la misma función δ de Dirac que estudiamos en la sección precedente. Pero, eso resulta imediatemente de la normalización,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)\ dk = \lim_{a \to 0} \frac{e^{-k^2/2a^2}}{a\sqrt{2\pi}} dk = 1 \tag{4.74}$$

La conclusión de estos dos cálculos es muy importante para las aplicaciones. De hecho, podemos considerar, en cada caso, que la anchura del pico representa el incertidumbre sobre la variable x o k. Si llamamos esta anchura δx y δk respectivamentem tenemos en los dos casos:

- 1er caso: $\delta x \approx l, \delta k \approx 1/l \Rightarrow \delta x\ \delta k \approx 1\ \forall l.$
- 2o caso: $\delta x \approx 1/a, \delta k \approx a \Rightarrow \delta x\ \delta k \approx 1\ \forall a.$

Estas relaciones, expresadas en las buenas unidades, son a la base del principio de incertidumbre de Heisenberg de la mecánica cuántica!

Regresamos un momento sobre la función δ de Dirac, lo introducimos como la transformada de Fourier de la función constante $f_0(x) = 1/(2\pi)$. Usando formalmente esta definición y en el teorema de convolución, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\widehat{f_o g} &= \widehat{f_o} * \widehat{g} && (4.75)\\ \Rightarrow \widehat{g} &= \delta * \widehat{g} && (4.76)\\ \Rightarrow \widehat{g}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-l)\ \widehat{g}(l)\ dl && (4.77) \end{aligned}$$

Esta relación es la definición usual de la "función" δ. Es equivalente a la relación simbólica siguiente:

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \qquad (4.78)$$

En hecho, todas esas relaciones formales pueden justificarse rigurosamente con el ayudo de la teoriá de las distribuciones, en particular, (4.77) significa que δ es el aplicación quien a cada función $\widehat{g}$ va asociar su valor en un punto k.

4.4.4 Lema de Riemann

Vamos acabar este capítulo por un resultado sencillo pero muy importante, el lema de Riemann:

Si $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$, entonces tenemos

$$\lim_{k\to\infty} | \int_a^b f(x) e^{ikx} dx| = 0 \qquad (4.79)$$

Otra manera de escribirlo, si $f(x)$ satisface la misma condición que antes, tenemos también:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} | \int_a^b f(x) \sin kx\ dx| &= 0 && (4.80)\\ \lim_{k\to\infty} | \int_a^b f(x) \cos kx\ dx| &= 0 && (4.81) \end{aligned}$$

<u>Prova:</u>

- Tenemos (a,b) finito y f constante sobre $(a,b) : f(x) = c$ si $x \in (a,b)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |\int_a^b c\ e^{ikx}\ dx| &= \lim_{k\to\infty} c\ (\frac{e^{ikb} - e^{ika}}{k}) && (4.82) \\ &= 0 && (4.83) \end{aligned}$$

- Si f es una función en escala, es decir una suma de una cuantidad finita de función del tipo precedentes, entonces, tenemos el mismo resultado.

- Consideramos f una función integrable en el sentido de Riemann, es decir que existe dos seguidas $\{E_n^-\}$ y $\{E_n^+\}$ de funciones en escaleras tal que $E_n^- \leq f(x) \leq E_n^+$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E_n^{\pm} dx = \int_a^b f(x)dx \tag{4.84}$$

Así, consideramos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\exists N > 0$ tal que $\forall n > N$, tenemos

$$\int_a^b (f(x) - E_n^-(x))dx \leq \epsilon \tag{4.85}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(x)e^{ikx}dx| - |\int_a^b E_n^-(x)e^{ikx}dx| &\leq \int_a^b (f(x) - E_n^-(x))e^{ikx}dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - E_n^-(x)|dx \\ &\leq \epsilon && (4.86) \end{aligned}$$

Y entonces,

$$|\int_a^b f(x)e^{ikx}dx| \leq \epsilon + |\int_a^b E_n^-(x)e^{ikx}dx| \tag{4.87}$$

Para k suficientemente grande, el 2o término del miembro derecho es arbitrariamente pequeño, lo que demuestra el lema.

Capitulo 5

Clasificación de las ecuaciones y condiciones de unicidad de las soluciones

5.1 Clasificación de las ecuaciones

Consideramos $L(u) = 0$ como una ecuación derivada parciale, lineal, del 2o grado y con coeficientes constantes, donde $u \equiv u(\overrightarrow{x})$, $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..x_n) \in R^n$. La parte de la ecuación quien contiene solamente las derivadas segundas se escribo como:

$$L^{(2)}(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \tag{5.1}$$

donde podemos suponer sin perder generalidad, que los c_{ij} son simetricos: $c_{ij} = c_{ji}$.

Por transformación de Fourier $\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{k}$, tenemos

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \to i\ k_j \widehat{u} \tag{5.2}$$

Y entonces,

$$\widehat{L^{(2)}(u)} = - \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} k_i k_j\ \widehat{u} \tag{5.3}$$

Esta expresión es una forma cuadrática en k_j. Sabemos que tal forma puede ser diagonalizada con una transformación regular y real $k_i \to \tilde{k}_j = \sum_l \alpha_{jl} k_l$, es decir que podemos reescribir $\widehat{L^{(2)}(u)}$ como una suma de cuadrados con el signo + o -.

$$\widehat{L^{(2)}(u)} \to -\sum_{i=1}^{p}(\tilde{k}_i)^2 + \sum_{j=1}^{q}(\tilde{k}_{p+j})^2, p+q \leq n. \tag{5.4}$$

Y el número de términos de cada signo, p y q respectivamente , va a depender solamente de la forma cuadrática (teorema de Silvester). Haciendo sobre (5.4), la transformación de Fourier inversa $\tilde{k}_j \to y_j$, obtenemos la forma diagonalizada de (5.1):

$$\widehat{L^{(2)}(u)} = L^{(2)}(\tilde{u}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_i}^2 - \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_{p+j}^2} \tag{5.5}$$

Como estan los terminos en derivadas de segundo grado quien determinan la natura de las soluciones (vamos a ver después que los términos en derivada de primer grado son términos de amortización y los términos proporcionales a la función son términos dispersivos), obtenemos asi una clasificación de todas las ecuaciones sobre estudios en 3 clases:

(1) $p+q=n, p=0$ o $q=0$: todas las variables estan presentes en las derivadas de segundo grado y todas con el mismo signo. $\Rightarrow$ ***ecuaciones elípticas***

Por ejemplo,

- ecuación de Laplace: $\triangle u = 0$
- ecuación de Helmholtz: $\triangle u + k^2 u = 0$

(2) $p+q=n, p=1$ o $q=1$: todas las variables estan presentes pero una de ellas aparece con el signo opuesto. $\Rightarrow$ ***ecuaciones hiperbólicas***

Por ejemplo,

- ecuación de la cuerda vibrante: $\triangle u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.
- ecuación de los telegrafistas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{(\alpha+\beta)}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\alpha\beta}{c^2}V = 0 \tag{5.6}$$

- ecuación de los telegrafistas reducida:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (\frac{\alpha-\beta}{2c})^2 V = 0 \tag{5.7}$$

- ecuación de Klein-Gordon (partícula cuántica libre, relativista, de masa m y de spin 0):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - (\frac{mc^2}{\hbar})^2 \Phi = 0 \tag{5.8}$$

(3) $p+q < n$: una variable (al menos) NO aparece en las derivadas de segundo grado. $\Rightarrow$ ***ecuaciones parabólicas***

Por ejemplo,

- ecuación del calor: $\triangle w - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} = 0$
- ecuación de Schrödinger libre (partícula cuántica libre, no-relativista y sin spin):

$$\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\Phi - i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \tag{5.9}$$

Notas

En general, las ecuaciones hiperbólicas estan definidas con la condición siguiente: $p + q = n, p \geq 1$ y $q \geq 1$. Podemos distinguir entre:

- ecuaciones propiamente hiperbólicas: $p = 1$ o $q = 1$.

- ecuaciones ultrahiperbólicas: $p \geq 2$ y $q \geq 2$. Tal ecuación se encuentra en relatividad general (Universo de Sitter) y en algunos modelos de física de las particulas elementales.

En hecho, la clasificación en 3 tipos (elíptico, hiperbólico y parabólica) puede extenderse a las ecuaciones a derivadas parciales de segundo grado *con coeficientes variables*, es decir con coeficientes c_{ij} quien son ellos mismos funciones de $\overrightarrow{x}$. Pero en tal caso, una misma ecuación puede pertenecer a varios tipos dependiendo de los valores de $\overrightarrow{x}$ consideradas. No obstante, esta clasificación juga un papel fundamental en la naturaleza de las soluciones.

5.2 Condición de unicidad de las soluciones

En los tres proximas secciones, vamos a etablecer las condiciones necesarias y suficiente para la unicidad de las ecuaciones de los 3 tipos:

(i) ecuación de la cuerda vibrante (hiperbólica).

(ii) ecuación de la calor (parabólica).

(iii) ecuación de Laplace (elíptica).

Para decirlo de otra forma, vamos a demostrar cuales son los datos quien determinan una solución única. En el proximo capitulo, vamos a construir explicitamente estas soluciones, estableciendo su existencia. Por supuesto, los resultados obtenidos son mucho mas generales que los 3 casos estudiados y son típicos para cada una de las 3 clases: hiperbólicas, parabólicas y elípticas, respectivamente.

5.2.1 Ecuaciones hiperbólicas, condiciones de Cauchy

Empenzamos con la ecuación de la cuerda vibrante, prototipo de la ecuación hiperbólica:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{5.10}$$

en cual $c = \sqrt{T/\mu}$ tiene la dimensión de una velocidad; T es la tensión y μ la masa para unidad de longitud.

Tomamos un pedazo de la cuerda, de longitud δx al descanso. Su energía se compone de

(i) energía cinética: $\frac{1}{2}\mu\delta x(\frac{\partial w}{\partial t})^2$.

(ii) energía potencial inducida por el alargamiento que vale entonces T multiplicado por el alargamiento de longitud:

$$\begin{aligned}
\dot{T}(\delta l - \delta x) &= T(\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta w)^2} - \delta x) \\
&= T\delta x(\sqrt{1 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2} - 1) \\
&\simeq T\delta x(1 + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 - 1) \\
&= \frac{1}{2}T\delta x(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

La energía total vale entonces,

$$\begin{aligned}
E_{tot}(\delta x) &= \frac{1}{2}\delta x\{\mu\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\} \qquad (5.12) \\
&= \frac{1}{2}\delta x\ T\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\} \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

La variación de esta energía en función del tiempo es proporcional a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\} &= 2\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\} \\
&= 2\{\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\{2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\} \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

donde usamos la ecuación del movimiento (ecuación de la cuerda vibrante).

Vamos a definir un vector a 2 componentes $\overrightarrow{U} \equiv (U_x, U_t)$ por las relaciones siguientes:

$$U_x \equiv 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t} \tag{5.15}$$

$$U_t \equiv -\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\} \tag{5.16}$$

Con estas definiciones, la relación (6.94) se escribo:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_t}{\partial t} \equiv \text{div}_2\overrightarrow{U} = 0 \tag{5.17}$$

Podemos notar que tenemos tambien esos relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}U_x - U_t &= (\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x})^2 \geq 0 \\ -(\frac{1}{c}U_x + U_t) &= (\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x})^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Vamos a usar la relación (6.96) con la ayuda del teoréma de la divergencia en 2 dimensiones para determinar las condiciones de unicidad de solución de la ecuación de la cuerda vibrante.

Consideramos un punto (P) arbitrario del plano (x, t). A partir de P, dibujamos unas lineas de pendiente $\pm 1/c$ quien cortan en A, B, respectivamente A', B', las horizontales $t = 0$ y $t = t' > 0$. Integramos sobre el trapezio $ABB'A'$ la divergencia nula de $\overrightarrow{U}$

$$0 = \Phi_{ABB'A'}(\overrightarrow{U}) \equiv \oint_{ABB'A'} (\overrightarrow{U}|\overrightarrow{n})dl \tag{5.19}$$

donde $\overrightarrow{n}$ es la normal exterior al trapezio de norma igual a la unidad. Sus componentes valen respectivamente:

- sobre AB: $(0, -1)$.
- sobre $BB^{'}$: (n_x, n_t) con $n_x/n_t = 1/c$ y $n_t > 0$.
- sobre $B^{'}A^{'}$: $(0, 1)$.
- sobre $A^{'}A$: (n_x, n_t) con $n_x/n_t = -1/c$ y $n_t > 0$.

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{AB}(-U_t)dx + \int_{BB'}(U_x n_x + U_t n_t)dl + \int_{A'B'} U_t dx + \int_{A'A}(U_x n_x + U_t n_t)dl \\ 0 &= \int_{AB}(-U_t)dx - \int_{A'B'}(-U_t)dx + n_t \int_{BB'}(\frac{1}{c}U_x + U_t)dl + n_t \int_{AA'}(\frac{-1}{c}U_x + U_t)dl \end{aligned}$$

Multiplicando por $T/2$, podemos ver que los 2 primeros términos representan la energía calculada respectivamente sobre AB y sobre $A^{'}B^{'}$. Desde entonces, usando la relación (6.97), tenemos

$$E_{tot}(AB) - E_{tot}(A^{'}B^{'}) = \frac{n_t T}{2}\left(\int_{BB'}(\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x})^2 dl + \int_{AA'}(\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x})^2 dl\right) \geq 0 \tag{5.20}$$

Entonces, tenemos

$$E_{tot}(AB) \geq E_{tot}(A^{'}B^{'}) \geq 0 \tag{5.21}$$

Suponemos que tenemos sobre AB, $w = 0$ y $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ (y entonces tambien $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$). En consecuencia, tenemos $E_{tot}(AB) = 0$ y entonces $E_{tot}(A^{'}B^{'}) = 0$. Dado que tenemos $E_{tot}(A^{'}B^{'}) = \frac{T}{2}\int_{A'B'}\{\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\}dx = 0$, eso es posible solamente si $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ sobre $A^{'}B^{'}$. El mismo razonamiento se aplica para todo tiempo $t^{'}$ entre 0 y t_0, es decir que $w(x,t)$ es constante y entonces $w = 0$ en todo el triangulo PAB.

Este resultado nos permite de establecer las condiciones initiales necesarias a la resolución del problema de la cuerda vibrante.

Consideramos, en efecto, w_1 y w_2, dos soluciones tal que $w_1 = w_2$ y $\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t}$ sobre AB. La diferencia $w = w_1 - w_2$ es todavia una solución de la misma ecuación, como la ecuación es lineal, y esta solución verifica $w = 0$ y $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ sobre AB. Entonces, $w(x,t) = 0$, es decir que $w_1(x,t) = w_2(x,t)$ en todo el triángulo PAB.

Eso significa que el dado de w y de $\frac{\partial w}{\partial t}$ sobre el segmento AB determina univocamente la solución w en todo el triángulo PAB. Inversamente, la solución al punto $P(x_0, t_0)$ es completamente determinada por los valores de movimiento w y de velocidad $\frac{\partial w}{\partial t}$ sobre el segmento$(x_0 - ct_0, x_0 + ct_0)$ al tiempo t_0. Estas dos funciones (w y $\frac{\partial w}{\partial t}$ a $t = 0$) se llaman **datos de Cauchy** *del problema. Decimos que la solución de la ecuación de la cuerda vibrante se obtiene resolviendo un problema de Cauchy.* Esto es característico de un ecuación hiperbólica.

<u>Notas</u>

(1) el mismo razonamiento se aplica textualmente a los problemas correspondiente a 2 dimensiones (membrana vibrante) y a 3 dimensiones. En dimension 2, por ejemplo, la construccion análoga se hace haciendo girar la figura alrededor de la vertical pasando por P, el segmento AB va devenir un disco en el plano $t = 0$ y PAB es un cono de quien la generatriz tiene una pendiente igual a $1/c$. La situación es identica en 3 dimensiones, pero es mas dificile de visualizar: cono de dimension 4 y que tiene como base una esfera de dimension 3, eso es la situación encontrada en relatividad especial.

(2) En el contexto de la relatividad (donde la propagación de la luz es descrita por una ecuación de onda $\triangle w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$, el punto a remarcar seria puesto sobre la noción de *causalidad*. El parametro c en el ecuación representa la velocidad de propagación de la información (por ejemplo, una perturbación) a lo largo de la cuerda , la membrana,etc... Como esta velocidad es finita, la region $t > 0$ va a dividirse en 3 partes, en comparación con el segmento arbitrario AB en el plano $t = 0$.

(I) el cono PAB, en cual la solución es completamente determinada por los datos de Cauchy sobre AB.

(II) la región CAPBD (cono abierto verso el futuro), en cual la solución es influenciada por los datos sobre AB pero también por los datos al exterior de AB.

(III) la región exterior a CABD, quien es causalmente separadas de AB, es decir que no es influenciada por los datos de AB.

El existencia de la region III que no puede comunicar con AB es una consecuencia del carácter finito de la velocidad de propagacion de la luz c: eso es exactemente lo que va diferenciar la relatividad de Einstein de la relatividad de Galileo.

(3) podemos simplificar un poco el cálculo haciendo el cambio de variable $t \to t^{'} = ct$

5.2.2 ecuaciones parabolicas: condiciones de frontera

Vamos a tratar únicamente el caso mas sencillo, la ecuación del calor a una dimensión, pero también el razonamiento es general y se generaliza a cualquier dimension.

Sea entonces $w(x,t)$ una solucion de la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{5.22}$$

Como la constante de difusión α es positiva, podemos cambiarla por el valor uno, cambiando nada más la escala del tiempo. Entonces, vamos a estudiar la ecuación:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{5.23}$$

Tenemos que distinguir 2 casos:

- caso de una barra de longitud finita.
- caso de una barra infinita.

Difusión de la calor en una barra finita

Sea AB un segmento de la barra a $t = 0$, $A^{'}B^{'}$ el mismo segmento al tiempo $t_1 > 0$. Asi, $ABB^{'}A^{'}$ es un rectangulo en el plano (x,t), $AA^{'}$ representa la historia del punto A y $BB^{'}$, la historia del punto B.

Vamos a demostrar que la función $w(x,t)$, solución de la ecuación (5.23)., va a alcanzar su máximo en un punto de la linea $A^{'}ABB^{'}$ y para probar eso, vamos a hacer uno razonamiento por el absurdo.

Sea:

* M el máximo de $w(x,t)$ en el rectángulo alcanzado en el punto (x_0,t_0).

* m el máximo de $w(x,t)$ sobre la linea $A^{'}ABB^{'}$.

Suponemos que $m < M$, es decir que $(x_0, t_0) \neq A^{'}ABB^{'}$. Definimos la función:

$$u(x,t) = w(x,t) + \frac{(x-x_0)^2}{4l^2}(M-m) \tag{5.24}$$

donde l es la longitud de AB.

Tenemos:

* $u(x_0,t_0) = w(x_0,t_0) = M$
* Sobre $A^{'}ABB^{'}$, como $|x-x_0| < l, u(x,t) \leq m+\frac{1}{4}(M-m) < M$. La función u va a alcanzar su máximo en un punto que no se encuentra sobre la linea $A^{'}ABB^{'}$. Llamamos esto punto $(x^{'},t^{'})$. Dos casos pueden presentarse: $(x^{'},t^{'})$ es estrictamente dentro del rectángulo o $(x^{'},t^{'})$ se encuentra sobre $A^{'}B^{'}$.

(A) 1er caso:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial x}(x^{'},t^{'}) & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x^{'},t^{'}) & = & 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^{'},t^{'}) & \leq & 0 \end{array} \tag{5.25}$$

(B) 2o caso:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial x}(x^{'},t^{'}) & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x^{'},t^{'}) & \geq & 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^{'},t^{'}) & \leq & 0 \end{array} \tag{5.26}$$

En los dos casos, tenemos

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(x^{'}, t^{'}) \leq 0 \tag{5.27}$$

Pero, por definición, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{(M-m)}{2l^2} \\ &= \frac{(M-m)}{2l^2} \\ &> 0 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Entonces, hay contradicciones, excepto si $M = m$, al contrario de nuestra hipótesis. Entonces la función $w(x,t)$ alcanza su máximo sobre la linea $A^{'}ABB^{'}$. Podemos aplicar el mismo razonamiento por la función $-w(x,t)$, quien es todavia una solución de (5.23) y entonces $w(x,t)$ va a alcanzar su mínimo sobre $A^{'}ABB^{'}$, por que $\min w = -\max(-w)$.

En consecuencia, si $w(x,t) = 0$ sobre la linea $A^{'}ABB^{'}$, $w(x,t) = 0$ en todo el rectángulo por que $0 = w_{max} \geq w(x,t) \geq w_{min} = 0$.

Este resultado va a darnos las condiciones de unicidad de la solución de la ecuación de calor. Sea w_1, w_2, dos soluciones de (5.23), igual sobre la linea $A^{'}ABB^{'}$. Entonces, $w = w_1 - w_2$ es una solución nula sobre $A^{'}ABB^{'}$ y entonces nula sobre todo el rectangulo, es decir que w_1 y w_2 coinciden en todo el rectangulo. Desde entonces, para especificar univocamente la solución de la ecuación de calor para una barra dada AB, se necesita la distribución initial de temperatura $w(x,0)$ en toda la barra y las valores $w(x_A,t)$ y $w(x_B,t)$ de la temperatura en las extremidades para todas las valores posible del tiempo. Eso es un ejemplo de condiciones a las fronteras.

Difusión de la calor en una barra infinita

En el caso de una barra infinita, no podemos imponer condiciones a las fronteras. En su lugar, vamos a suponer que la solución es acotada para todo tiempo $t > 0$. Con este condición, vamos a demostrar que una solución de (5.23), nula para $t = 0$, queda identicamente nula para todo tiempo $t > 0$ y por eso, vamos a usar los resultados precedentes.

Sea $w(x,t)$ solución de (5.23) tal que $w(x,t) \leq M$ y $w(x,0) = 0$. Notamos que $x^2 + 2t$ es también una solución de (5.23) lo que permite construir nuevas soluciones por combinación lineal. Sea $(x^{'}, t^{'})$ un punto arbitrario, con $t^{'} > 0$ y definimos las soluciones siguientes, en cual $\epsilon > 0$ es cualquier número positivo:

$$w_{\pm}(x,t) \equiv w(x,t) \pm \epsilon \frac{x^2 + 2t}{x'^2 + 2t'} \tag{5.29}$$

Constuimos alrededor de $(x^{'}, t^{'})$ un gran rectángulo $-L \leq x \leq L$ y con $0 \leq t \leq T$. Para $\epsilon > 0$ dado, podemos siempre escoger L tal que el segundo término en (5.29) sea el dominante en $x = \pm L$. Eso es posible por que el primer término de (5.29) es limitado por M.

Asi, para L suficentamente grande, tenemos

* $w_+(x,t) \geq 0$ sobre la frontera del rectangulo, en particular min$w_+(x,t) \geq 0$ como el mínimo se alcanza sobre las fronteras (ver sección precedente), y entonces, tenemos

$$w_+(x^{'}, t^{'}) = w(x^{'}, t^{'}) + \epsilon \geq \ \min_{(x,t)} w_+(x,t) \geq 0 \tag{5.30}$$

* $w_-(x^{'}, t^{'}) \leq 0$ sobre la frontera y desde entonces, de la misma manera que antes, tenemos

$$w_-(x^{'}, t^{'}) = w(x^{'}, t^{'}) - \epsilon \leq \ \max_{(x,t)} w_-(x,t) \leq 0 \tag{5.31}$$

Al fin, tenemos

$$-\epsilon \leq w(x^{'}, t^{'}) \leq \epsilon \tag{5.32}$$

Como ϵ es arbitrario, $\Rightarrow w(x^{'}, t^{'}) = 0$

Este resultado nos da la condición de unicidad de la solución en el caso de la barra infinita: si dos soluciones acotadas w_1 y w_2 coinciden a $t = 0$, ellas van a coincidir para todo tiempo $t > 0$. Una solución acotada es, entonces, univocamente especificada por la distribución inicial de temperatura, en el caso de una barra infinita.

5.2.3 ecuación de Laplace, funciones armónicas

Vamos a estudiar la ecuación de Laplace:

$$\triangle h = 0 \tag{5.33}$$

en 2 o 3 dimensiones. Una función de clase $\mathcal{C}^2$, en un dominio abierto Ω y verificando la ecuación de Laplace en este dominio, se llama ***función armonica en*** Ω(la función puede ser discontinua sobre la frontera $\partial\Omega$).

Ejemplos de funciones armónicas

(A) Parte imaginaria y real de una función holomorfica.

En dos dimensiones, sea $f(z)$ una función holomorfica en un dominio $\Omega \subseteq C \simeq R^2$. Si lo decomponemos en sus parte real y imaginaria, tenemos

$$f(z) \equiv f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{5.34}$$

El holomorfismo de f significa que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.35}$$

Podemos verificar inmediatemente que u y v satisfacen las ecuaciones de Laplace:

$$\triangle u = 0, \triangle v = 0 \tag{5.36}$$

eso es decir que u y v son funciones armónicas en Ω. Hablamos en este caso de *par de funciones armónicas conjugadas.*

(B) Sea $f(x_1, ..., x_n)$ una función armonica en $R^n \backslash 0$, solamente radial, es decir que la función f depende solamente del radio r y NO de los ángulos. En este caso, se puede resolver explicitamente la ecuación de Laplace. Usando la expresión del Laplaciano en coordenadas polares sobre R^n, tenemos

$$\triangle_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Theta_n \tag{5.37}$$

donde Θ_n representa el operador diferencial portando solamente sobre las variables angulares.

Asì, para $f(\overrightarrow{x}) = f(r)$, tenemos que resolver la ecuación siguiente:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{df}{dr} = 0 \tag{5.38}$$

Definimos $\frac{df}{dr} \equiv g(r)$, la ecuación (5.38) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
g^{'} + \frac{n-1}{r} g &= 0 && (5.39)\\
\frac{g^{'}}{g} + \frac{n-1}{r} &= 0 && (5.40)\\
\frac{d}{dr}(\ln g) + (n-1)\frac{d}{dr}(\ln r) &= 0 && (5.41)\\
\frac{d}{dr}\ln(r^{n-1} g) &= 0 && (5.42)\\
\Rightarrow \ln(r^{n-1} g) &= \text{constante} && (5.43)\\
\Rightarrow g(r) &= \text{constante } r^{-(n-1)} && (5.44)
\end{aligned}$$

Tenemos que distinguir dos casos:

(i) $n = 2 \Rightarrow \frac{df}{dr} = g(r) = \frac{c}{r}$

$$\Rightarrow f(r) = c\ln r + d = \ln(dr^c) \tag{5.45}$$

(ii) $n > 2 \Rightarrow \frac{df}{dr} = g(r) = \frac{c}{r^{n-1}}$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{c}{r^{n-2}} + d \tag{5.46}$$

Entonces, para los dos casos que nos interesan lo mas $n = 2, 3$, las únicas funciones armónicas radial son:

$$\begin{aligned}
n = 2 \quad &\Rightarrow \quad f(r) \sim \ln r && (5.47)\\
n = 3 \quad &\Rightarrow \quad f(r) \sim \frac{1}{r} && (5.48)
\end{aligned}$$

Condiciones de unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace

Usando la identidad de Green, con $f = g = h$, tenemos

$$\text{div}(h\overrightarrow{\nabla} h) = h\triangle h + \|\overrightarrow{\nabla} h\|^2 \tag{5.49}$$

Sea Ω un dominio en cual h es armónica, es decir $\triangle h = 0$. Entonces, tenemos, usando el teorema de la divergencia:

$$\int\int\int_{\Omega} \mathrm{div}(h\overrightarrow{\nabla}h) = \int\int_{\partial\Omega} h\frac{\partial h}{\partial n}d\sigma = \int\int\int_{\Omega} \|\overrightarrow{\nabla}h\|^2 d\tau \tag{5.50}$$

donde $\frac{\partial h}{\partial n} \equiv (\overrightarrow{\nabla}h|\overrightarrow{n})$ es la derivad normal de h(es decir que es la componente normal (exterior) de $\overrightarrow{\nabla}h$ sobre la superficie $\partial\Omega$. De (5.50), podemos encontrar las condiciones de unicidad de la solución de la ecuación de Laplace, usando siempre el mismo razonamiento:

(i) $h = 0$ ***sobre*** $\partial\Omega$: por ecuación (5.50), $\overrightarrow{\nabla}h = 0$ en Ω, es decir que h es una función constante en Ω y en consecuencia, $h = 0$. Desde entonces, si $h_1 = h_2$ sobre $\partial\Omega$, $h_1 - h_2$ es armónica en Ω y nula sobre $\partial\Omega$, y entonces es nula en todo Ω, es decir que $h_1 = h_2$. Entonces, h armónica en Ω es univocamente determinada por sus valores sobre la frontera $\partial\Omega$.

(ii) $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ ***sobre*** $\partial\Omega$: de la misma manera, usando (5.50), h es constante sobre Ω. Entonces, si $\frac{\partial h_1}{\partial n} = \frac{\partial h_2}{\partial n}$ sobre $\partial\Omega$, tenemos $h_1 = h_2$+constante en Ω. Eso significa que h es determinado a una constante cerca por las valores de su derivada normal a la frontera $\partial\Omega$.

(iii) $h = 0$ ***sobre una parte de*** $\partial\Omega$***,*** $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ ***sobre la parte complementaria.***: por el mismo razonamiento, $h = 0$ en Ω, y entonces h es univocamente determinada por el dato de h sobre una parte de $\partial\Omega$ y de $\frac{\partial h}{\partial n}$ sobre su complementaria.

5.3 Propiedades de las funciones armónicas

5.3.1 Primera propiedad

Si h ***es armónica, el flujo de*** $\overrightarrow{\nabla}h$ ***a través de una superficie cerrada es nula***

Provar:

Sea h armónica en Ω, integrando $\triangle h = 0$ en Ω y usando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\int\int\int_{\Omega} \mathrm{div}(\overrightarrow{grad}h)d\tau = \int\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n}d\sigma = 0 \tag{5.51}$$

5.3.2 Segunda propiedad

Tenemos $h(P) = < h >_{\Sigma_P(R)}$***, es decir que el valor de*** h ***en un punto*** P ***es la media aritmética de sus valores sobre una cualquier esfera*** $\Sigma_P(R)$ ***centrada en*** P ***(y contenida en el dominio de armonicidad de*** h***.***

Provar:

Sea h armónica en Ω y $P \in \Omega$, sea $\Sigma_P(R)$, la esfera de radio R y de centro P, contenida a dentro de Ω

Vamos a aplicar la identidad de Green al volumen $\tilde{\Omega}$, comprendido entre $\partial\Omega$ y $\Sigma_P(R)$; entonces, tenemos $\partial\tilde{\Omega} = \partial\Omega \bigcup \Sigma_P(R)$. La normal exterior a $\partial\tilde{\Omega}$ es la normal exterior a $\partial\Omega$ y es la normal interior a $\Sigma_P(R)$, (lo que va a darnos un cambio de signo).

Ademas, si usamos las coordenadas polares (r, θ, ϕ) centrada en P, tenemos sobre $\Sigma_P(R)$, $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial r}$.

Aplicando la identidad de Green a $\partial\tilde{\Omega}$, con $f = 1/(4\pi r)$ y $g = h$,(estas dos funciones son armónicas sobre $\partial\tilde{\Omega}$), tenemos

$$\int\int_{\Sigma_P(R)} \{\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial h}{\partial r} - h\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{4\pi r})\}d\sigma = \int\int_{\partial\Omega} \{\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{4\pi r})\}d\sigma \quad (5.52)$$

Por el miembro izquierdo, tenemos

$$\begin{aligned} \int\int_{\Sigma_P(R)} \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial h}{\partial r}d\sigma &= \frac{1}{4\pi R}\int\int_{\Sigma_P(R)} \frac{\partial h}{\partial r}d\sigma = 0 \\ \int\int_{\Sigma_P(R)} h\frac{\partial}{\partial r}(\frac{-1}{4\pi r})d\sigma &= \int\int_{\Sigma_P(R)} h\frac{1}{4\pi r^2}d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi R^2}\int\int_{\Sigma_P(R)} hd\sigma \\ &= < h >_{\Sigma_P(R)} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Entonces, tenemos

$$< h >_{\Sigma_P(R)} = \int\int_{\partial\Omega} \{...\}d\sigma \quad (5.54)$$

donde el miembro derecho de este ecuación es independiente de R. Entonces, $< h >_{\Sigma_P(R)}$ es independiente de R y es igual a su límite por $R \to 0$, eso es decir $< h >_{\Sigma_P(R)}$ es igual al valor de h al punto P como h es continua en P.

Nota: Podemos demostrar la misma propiedad en dimension 2 usando la función armónica radial apropriada (es decir $\ln r$).

5.3.3 Tercera propiedad

Una función h, armónica en Ω alcanza su máximo sobre $\partial\Omega$.

Provar:

Este propiedad se demuestra usando la propiedad precedente y se demuestra por el absurdo.

Sea h armónica en Ω y suponemos que h alcanza su máximo en un punto P estrictamente a dentro de Ω. Consideramos una esfera Σ centrada en P y inscrita en Ω.

Sea Q el punto de contacto entre Σ y $\partial\Omega$, tenemos entonces

$$h(P) \geq h(P^{'}), \forall P^{'} \in \Sigma \bigcap \Omega \tag{5.55}$$

y en particular $h(P) \geq h(Q)$. Eso es en contradicción con la propiedad precedente por que $h(P)$ deberia ser la media de todas la valores $h(P^{'}, h(Q)$. Entonces P tiene que estar sobre $\partial\Omega$, es decir que $P = Q$.

Como $-h$ es tambien armónica, $\min_{\Omega} h \equiv -\max_{\Omega}(-h)$ es también alcanzado sobre $\partial\Omega$. Eso permite de encontrar de nuevo la primera condición de unicidad a saber si $h = 0$ sobre $\partial\Omega$, $h = 0$ en todo Ω.

Otra consecuencia de esta propiedad es que una función armónica radial es necesariamente *monotóna*.

5.4 Ecuación de Poisson y funciones de Green del Laplaciano

5.4.1 Noción de función de Green

En un sistema de coordenadas polares centrada en P, tenemos de las propiedades precedentes, la representación siguiente para la función h, armónica en Ω:

$$h(P) = \int\int_{\Sigma(R)} \{h\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-1}{4\pi r}\right) - \left(\frac{-1}{4\pi r}\right)\frac{\partial h}{\partial r}\}d\sigma \tag{5.56}$$

$$= \int\int_{\partial\Omega} \{h\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{-1}{4\pi r}\right) - \left(\frac{-1}{4\pi r}\right)\frac{\partial h}{\partial n}\}d\sigma \tag{5.57}$$

En cualquier coordenadas, si $\overrightarrow{x}$ es la posición del punto P y $x^{'}$ el punto corriendo, tenemos $r = |\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|$.

Si definimos

$$G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}') \equiv \frac{-1}{4\pi r} = \frac{-1}{4\pi|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}'|} \tag{5.58}$$

Las relaciones (5.57) se escriben

$$h(\overrightarrow{x}) = \int\int_{\Sigma(R)} \{h(\overrightarrow{x'})\frac{\partial G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}')}{\partial n} - G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}')\frac{\partial h}{\partial n}(\overrightarrow{x}')\}d\sigma \tag{5.59}$$

$$= \int\int_{\partial\Omega} \{h(\overrightarrow{x}')\frac{\partial G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}')}{\partial n} - G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}')\frac{\partial h}{\partial n}(\overrightarrow{x}')\}d\sigma \tag{5.60}$$

Si $\partial\Omega$ es también una esfera centrada en $P(\overrightarrow{x}$, el segundo término en el miembro derecho es céro (usando la primera propiedad de las funciones armónicas) y obtenemos bien el valor de $h(\overrightarrow{x})$ a partir de la valores de h sobre $\partial\Omega$.

$$h(x) = \int\int_{\Sigma(R)} h(\overrightarrow{x}')\frac{\partial G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}')}{\partial n} \tag{5.61}$$

Pero, eso es también posible para otro tipo de superficie $\partial\Omega$. En hecho, la función $G_0(x, x^{'})$, bien adaptada a una esfera centrada en x, no lo es para cualquier otra superficie $\partial\Omega$. En este caso, vamos a substituir G_0 por una otra función $G(x, x^{'})$, nula para $x^{'} \in \partial\Omega$ pero tal que la relación (5.61) queda válida si integramos sobre $\partial\Omega$ en lugar de $\Sigma(R)$.

Por eso, definimos G, llamada función de Green del Laplaciano sobre Ω, como una función que verifica los dos condiciones siguientes:

(i) $G(x,x^{'}) = G_0(x,x^{'})+K(x^{'})$ donde K es una función armonica (y entonces continua) sobre todo Ω, incluido en P.

(ii) $G(x,x^{'})|_{x^{'}\in\partial\Omega} = 0$

Con esta definición, podemos siempre escribir la función $h(x)$ en términos de sus valores sobre la frontera $\partial\Omega$ y de la función de Green del Laplaciano sobre Ω:

$$h(x) = \int\int_{\partial\Omega} h(x^{'})\frac{\partial G(x,x^{'})}{\partial n}d\sigma \tag{5.62}$$

La unicidad de G es evidente: K es armónica en Ω y su valor sobre la frontera $\partial\Omega$ es fija: $K|_{\partial\Omega} = -G_0|_{\partial\Omega}$. Entonces, K es univocamente determinada en Ω.

Notamos que por la definición misma, la función de Green $G(x,x^{'})$ tiene en el punto $x = x^{'}$, la misma singularidad que $G_0(x,x^{'})$.

Notas:

Podemos también introducir una otra función de Green que satisface la relación siguiente:

$$\frac{\partial G_N}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5.63}$$

Si $G|_{\partial\Omega} = 0$, decimos que G satisface ***una condición de Dirichlet***; si $\frac{\partial G_N}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$, decimos que G satisface ***una condición de Neumann.***

ejemplos

(a) $\partial\Omega = \Sigma(R_1)$, una esfera centrada en P y de radio R_1,

$$\Rightarrow G = \frac{1}{4\pi R_1} - \frac{1}{4\pi r} \tag{5.64}$$

(b) $\Omega = R^3$ y $\partial\Omega =$ esfera al infinito:

$$G = K - \frac{1}{4\pi r} \tag{5.65}$$

Al infinito, $G|_\infty = K|_\infty = 0$, K es entonces una función armónica en todo R^3, nula al infinito, y en consecuencia, $K \equiv 0$ por la propiedad del máximo. Entonces, tenemos

$$G_{R^3} = G_0 = \frac{-1}{4\pi r} \tag{5.66}$$

(c) caso general:

en todos los otros casos, la función de Green G_Ω del laplaciano tiene que ser calculada explícitamente, lo que es, muchas veces, muy difícil. Notamos que las dos propiedades que sirven a definir la función de Green implican

$$\begin{aligned} \triangle G_\Omega(x,x^{'}) &= 0 \text{ para } x^{'} \neq x && (5.67)\\ G_\Omega(x,x^{'}) &= 0 \text{ para } x^{'} \in \partial\Omega && (5.68) \end{aligned}$$

lo que explica que G_Ω es relacionada al mismo tiempo al Laplaciano e al dominio Ω. Una noción analoga puede definirse por otros operadores diferenciales.

5.4.2 Ecuación de Poisson en R^3

Sea la ecuación de Poisson en R^3,

$$\triangle f = \rho \tag{5.69}$$

donde ρ es una función decreciendo suficientemente rapida para $|\overrightarrow{x}| \to \infty$.

Vamos a verificar que la función

$$f(\overrightarrow{x}) = \frac{-1}{4\pi}\int_{R^3} d\overrightarrow{x}'\,\frac{\rho(\overrightarrow{x}')}{|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}'|} \tag{5.70}$$

es una solución de (5.69). La solución general es obtenida adicionando una función armónica arbitraria definida sobre R^3.

Como $\triangle f = div(\overrightarrow{grad} f)$, vamos a evaluar el gradiente de f:

$$\overrightarrow{grad} f(\overrightarrow{x}) = \frac{-1}{4\pi}\int_{R^3} d\overrightarrow{x}'\,\rho(\overrightarrow{x}')\overrightarrow{grad}_x\left(\frac{1}{|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}'|}\right) \tag{5.71}$$

Sea Ω cualquier volumen acotado, usando el teorema de la divergencia, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \triangle f d^3x &= \int_\Omega div(\overrightarrow{grad} f)dx && (5.72)\\ &= \int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma(x) && (5.73)\\ &= \frac{-1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} d\sigma(x)\int_{R^3} dx^{'}\rho(\overrightarrow{x}')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}'|}\right) && (5.74)\\ &= \frac{-1}{4\pi}\int_{R^3} dx^{'}\rho(\overrightarrow{x}')\Phi(\overrightarrow{x}') && (5.75) \end{aligned}$$

con $\Phi(\overrightarrow{x}')$, el flujo a través de $\partial\Omega$ del vector $\overrightarrow{grad}\frac{1}{|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}'|}$

$$\Phi(\overrightarrow{x}') = \int_{\partial\Omega} d\sigma(x)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x}'|}\right) \tag{5.76}$$

Usando las propiedades de las funciones armónicas, podemos facilmente ver que $\Phi(x^{'}) = 0$ si $x^{'}$ no pertenece a Ω y $\Phi(x^{'}) = -4\pi$ si $x^{'} \in \Omega$.

<u>Provar:</u>
Si $x^{'}$ no pertenece a Ω, eso significa que la función $\frac{1}{|x-x^{'}|}$ es armónica sobre Ω, entonces, el flujo de su gradiente a través de $\partial\Omega$ es nulo.
Si $x^{'} \in \Omega$, en tal caso, $\Phi(x^{'}) = -4\pi$

Aplicamos la primera propiedad de las funciones armónicas sobre el volumen comprendido entre $\partial\Omega$ y $\Sigma(R)$. Sobre este volumen, la función $\frac{1}{|x-x^{'}|}$ es armónica. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(x^{'}) &= \int_{\partial\Omega} d\sigma(x) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-x^{'}|}\right) && (5.77) \\ &= \int_{\Sigma(R)} d\sigma(x^{''}) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{|x^{''}-x^{'}|}\right) && (5.78) \\ \Rightarrow \Phi(x^{'}) &= \int_{\Sigma(R)} d\sigma(x^{''}) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) && (5.79) \\ &= 4\pi R^2 \frac{-1}{R^2} = -4\pi && (5.80) \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \triangle f d^3x &= \frac{-1}{4\pi} \int_{R^3} d^3x^{'} \rho(x^{'}) \Phi(x^{'}) && (5.81) \\ &= \int_{\Omega} d^3x^{'} \rho(x^{'}) && (5.82) \end{aligned}$$

Como Ω es cualquier, tenemos $\triangle f = \rho$.

También podemos resolver la ecuación de Poisson directamente usando la transformada de Fourier. Aplicándola sobre los dos miembros de $\triangle f = \rho$, tenemos

$$-\sum_{i=1}^{3} k_i^2 \widehat{f} = \widehat{\rho} \tag{5.83}$$

$$\Rightarrow \widehat{f} = \frac{-1}{\sum_{i=1}^{3} k_i^2}\widehat{\rho} = \widehat{g}\widehat{\rho} \tag{5.84}$$

donde g es la transformada de Fourier inversa de $-1/k^2$.

Usando el teorema de convolución, (sobre R^3, el teorema de convolución nos dice:$\widehat{f * g} = (\sqrt{2\pi})^3 \widehat{f}\widehat{g}$), tenemos

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} g * \rho \tag{5.85}$$

Usando el hecho que $\widehat{\frac{1}{4\pi r}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2}$ (ver transformada de Fourier del potencial de Yukawa (con límite $m \to 0$), obtenemos para la función f:

$$f = \left(\frac{-1}{4\pi r}\right) * \rho \tag{5.86}$$

$$= \int_{R^3} \frac{-1}{4\pi} d^3x^{'} \rho(x^{'}) \frac{1}{|x - x^{'}|} \tag{5.87}$$

5.4.3 Ecuación de Poisson en un dominio Ω

En el caso de R^3, la solución de la ecuación de Poisson es dada por la función de Green $G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^{'}) = \frac{-1}{4\pi|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^{'}|}$ del laplaciano:

$$f(\overrightarrow{x}) = \int_{R^3} d^3x^{'} G_0(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^{'}) \rho(\overrightarrow{x}^{'}) \tag{5.88}$$

De otro lado, una función armónica en un dominio Ω es dada en función de sus valores sobre $\partial\Omega$, usando la función de Green G_Ω. Esos dos resultados pueden combinarse, eso significa que podemos escribir la solución de Poisson $\triangle f = \rho$ en Ω en función de sus valores sobre $\partial\Omega$ y de la función de Green G_Ω.

Para probar eso, es suficiente de partir de la identidad de Green cambiando

h por la función f que buscamos:

Como anteriormente, empenzamos con la identidad de Green sobre el volumen $\widetilde{\Omega}$ y con las funciones f y G_Ω.

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\Omega}} (f \triangle G_\Omega - G_\Omega \triangle f) &= \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{\partial G_\Omega}{\partial n} - G_\Omega \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma \\ &\quad - \int_{\Sigma(R)} \left(f \frac{\partial G_\Omega}{\partial r} - G_\Omega \frac{\partial f}{\partial r} \right) d\sigma \qquad (5.89)\end{aligned}$$

En el miembro de izquierda, $\triangle G_\Omega = 0$ por que G_Ω es armónica en $\widetilde{\Omega}$ y $\triangle f = \rho$.

En el miembro de derecha, $G_\Omega = 0$ sobre $\partial\Omega$ y

$$\lim_{R\to 0} \int_{\Sigma(R)} f \frac{\partial G_\Omega}{\partial r} d\sigma = f(\overrightarrow{x}) \qquad (5.90)$$

También, podemos fácilmente calcular el segundo termino de la segunda integral:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to 0} \int_{\Sigma(R)} G_\Omega \frac{\partial f}{\partial r} d\sigma &= \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial r} \lim_{R\to 0} \int_{\Sigma(R)} \left(\frac{-1}{4\pi r} + K \right) d\sigma \qquad (5.91) \\ &= \frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial r} \lim_{R\to 0} \left(\frac{-1}{4\pi R} + K(\overrightarrow{x}) \right) 4\pi R^2 = 0 \qquad (5.92)\end{aligned}$$

por que K y $\frac{\partial f}{\partial r}$ son continuas en $\overrightarrow{x}$. Entonces, nos quedamos con

$$f(\overrightarrow{x}) = \int_\Omega \rho(\overrightarrow{x}^{'}) G_\Omega(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^{'}) d^3x^{'} + \int_{\partial\Omega} f(\overrightarrow{x}^{'}) \frac{\partial G_\Omega(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^{'})}{\partial n} d\sigma \qquad (5.93)$$

Notamos que la solución (5.93) puede escribirse como $f = f_1 + f_2$ donde $\triangle f_1 = \rho$ y $f_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$, y donde $\triangle f_2 = 0$ y f_2 toma sobre $\partial\Omega$ las valores prescritas.

Esta solución contiene todos los otros casos precedentes como casos particulares:

- para $\rho = 0$, la solución (5.93) se reduce a ecuación (5.62).
- si imponemos $f = 0$ sobre $\partial\Omega$, obtenemos $f = f_1$.
- en el caso $\Omega = R^3$, encontramos la ecuación (5.70) y $G_{R^3} = G_0$

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_{\Sigma(\infty)} = \frac{\partial G_0}{\partial r}|_{\Sigma(\infty)} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} = 0 \tag{5.94}$$

En conclusión, si conocemos la función de Green G_Ω del Laplaciano en la región Ω, podemos resolver la ecuación de Poisson $\triangle f = \rho$ para cualquier termino no-homogeneo ρ y los valores prescritos de f sobre $\partial\Omega$. Desafortunadamente, G_Ω es en general muy difícil de calcular.

Capitulo 6

Resolución de las ecuaciones

En el capítulo anterior, vimos que las ecuaciones derivadas parciales de la física clásica (lineales y de orden máximo 2) se reparten en 3 clases: híperbolica, parabólica y elíptica. Los prototipos de cada clase son respectivamente la ecuación de ondas, de calor y de Laplace. Establecemos en el capítulo anterior la naturaleza de los datos necesarios para especificar, en cada caso, una solución única (condiciones iniciales, condiciones a la frontera). Nos queda a construir explicitamente estas soluciones. El metódo general que vamos a usar es ***el métódo de la separación de variables***. Como ya lo hicimos por la ecuación de calor, tenemos que distinguir dos casos: sistemas acotados y sistemas infinitos. En efecto, los fenómeno físicos correspondientes son de naturaleza fundamentalemente diferentes y eso va a reproducirse en las técnicas matemáticas usadas: serie de Fourier en el caso acotado e integral de Fourier en el caso infinito.

6.1 Sistemas acotados

6.1.1 Caso hiperbólico: la cuerda vibrante

Sea una cuerda vibrante de longitud l, fija a sus dos extremidades. Esto problema es descrito por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{6.1}$$

con condiciones a la frontera:

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad \forall t \tag{6.2}$$

Vamos a aplicar el metódo de separación de variable. Por eso, buscamos primero, las soluciones particulares de la forma:

$$w(x,t) = u(x)f(t) \tag{6.3}$$

que verifica las condiciones a la frontera (6.2). Esto va a permitir dividir la ecuación derivada parcial inicial en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una en u, la otra en f. En efecto, usando (6.3) en (6.1), obtenemos

$$\begin{aligned} u^{''}(x)f(t) - \frac{1}{c^2}u(x)f^{'}(t) &= 0 \\ \frac{u^{''}(x)}{u(x)} &= \frac{1}{c^2}\frac{f^{''}(t)}{f(t)} \end{aligned} \tag{6.4}$$

El miembro de izquierda depende solamente de x y el de derecho solamente de t. Como las dos variables x y t son independiente, la igualdad (6.4) es solamente posible si los dos miembros son iguales a una misma constante que llamamos $-k^2$. La ecuación (6.1) es entonces equivalente a los dos ecuaciones:

$$u^{''}(x) + k^2u(x) = 0 \tag{6.5}$$

$$f^{''}(t) + (kc)^2f(t) = 0 \tag{6.6}$$

La solución general de (6.5) es

$$u(x) = A\sin kx + B\cos kx \tag{6.7}$$

Aplicando las C.F (6.2) que se aplica solamente sobre $u(x)$

$$\begin{aligned} &\bullet w(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ &\bullet w(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(l) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Entonces, hay una infinidad de soluciones posibles, correspondientes a los valores sucesivos $k_n = n\pi/l$. Por estos valores, las soluciones correspondientes de (6.6) se escriben:

$$f_n(t) = A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t \tag{6.8}$$

con $\omega_n \equiv k_n c = \frac{n\pi c}{l}$. Combinando (6.7) y (6.8), obtenemos una infinidad de soluciones factorizadas:

$$w_n(x,t) = (A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t)\sin k_n x \tag{6.9}$$

Las soluciones (6.9) son llamadas ***ondas estacionarias*** por que ellas describen movimientos en cuales todos los puntos x vibran en fase; la configuración tomada por la cuerda vibrante no se propaga, la configuración es estacionaria. Estas ondas estacionarias juegan el mismo papel que los modos normales para un sistema a un número finito de grados de libertad. Asi la solución general de (6.1) es una superposición lineal arbitraria de ondas estacionarias:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin k_n x \tag{6.10}$$

Notas

Escogimos una constante negativa $-k^2$, en (6.4). Si tomamos una constante positiva (por ejemplo, $+k^2$), no podemos satisfacer las C.F. En esto caso, la ecuación (6.5) es igual a:

$$u^{''}(x) - k^2 u(x) = 0 \tag{6.11}$$

Y la solución de tal ecuación es

$$u(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \tag{6.12}$$

La C.F. $u(0) = 0$ implica $A + B = 0$, es decir que $u(x) = csinh(kx)$ y la C.F. $u(l) = 0$ es imposible a satisfacer, como $sinh(kl) = 0$ solamente si $k = 0$.

El mismo razonamiento permite el excluir también una valor compleja de la constante.

Regresamos a la solución general (6.10). Aplicando lo que vimos en el capítulo anterior, la solución única es determinada por las condiciones de Cauchy $w(x,0) = g(x)$ y $\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = h(x)$. Usando (6.10), obtenemos

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x = g(x) \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \sin k_n x = h(x) \tag{6.14}$$

Entonces, los coeficientes A_n y B_n pueden ser obtenidos univocamente como coeficientes de Fourier de $g(x)$, respect. $h(x)$. Claro, tenemos que suponer que h y g son funciones que pueden escribirse en términos de serie de Fourier sobre el intervalo $[0, l]$.

Podemos remarcar que en término de espacio de Hilbert, todo este proceso toma una significación muy sencilla: las ondas estacionarias $w_n(x,t)$ constituyen una base ortonormal. La solución (6.10) es un vector arbitrario del espacio de Hilbert correspondiente y las condiciones iniciales (6.13,6.14) determinan un vector único de esto espacio, que es solución del problema.

En resumen, el métódo de separación de variable tiene los 3 etapas siguientes:

(1) buscar las ondas estacionarias, es decir las soluciones factorizadas verificando las C.F.

(2) escribir la solución general (6.10)

(3) determinar la solución única correspondiente a las condiciones iniciales o fronteras dadas.

6.1.2 Caso parabólico: difusión del calor

Aplicamos el mismo métódo a la ecuación de calor:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{6.15}$$

describiendo la difusion de calor sobre una barra de longitud l. Como visto en el capítulo anterior, la solución va a estar determinada univocamente por los datos siguientes:

- la temperatura a las extremidades:

$$w(0,t) = 0, w(l,t) = 0 \ \ \forall t \tag{6.16}$$

- la distribución inicial de temperatura.

$$w(x,0) = h(x) \tag{6.17}$$

Si queremos una solución continua en x y t, tenemos que imponer que esas condiciones sean compatibles, es decir que

$$h(0) = h(l) = 0 \tag{6.18}$$

Como antes, vamos a buscar una solución factorizada $w(x,t) = u(x)f(t)$ verificando las C.F. de (6.16), es decir $u(o) = u(l) = 0$. Usando esta solución en (6.15), obtenemos

$$\frac{u^{''}(x)}{u(x)} = \frac{1}{\alpha}\frac{f^{'}(t)}{f(t)} = -k^2 \tag{6.19}$$

lo que da las ecuaciones:

$$u^{''}(x) + k^2 u(x) = 0 \tag{6.20}$$

$$f^{'}(t) + \alpha k^2 f(t) = 0 \tag{6.21}$$

La solución de (6.20) verificando las C.F. es

$$u(x) = C \sin k_n x \text{ con } k_n = \frac{n\pi}{l}, \ n = 1,2,3,... \tag{6.22}$$

Cuando a la ecuación (6.21), ella tiene por solución:

$$f(t) = e^{-\alpha k_n^2 t} \tag{6.23}$$

Podemos notar que de nuevo aquí tenemos que tomar $-k^2 < 0$, por que de otra manera con una constante positiva, no podemos satisfacer las C.F.

La solución general verificando las C.F (6.21) se escribe entonces como:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x \ e^{-\alpha k_n^2 t} \tag{6.24}$$

Imponiendo a (6.24), la condición inicial, tenemos

$$w(x,0) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x \tag{6.25}$$

es decir que los c_n son determinados univocamente como coeficientes de Fourier de h.

Nos queda a estudiar el caso de C.F. generales, por ejemplo $w(0,t) = T_0$ y $w(l,t) = T_1$. Sea $w_0(x,t)$ la solución general correspondiente a los C.F. homogeneas: $w_0(0,t) = 0 = w_0(l,t)$. Pero, también una función lineal $w_1(x,t) = ax+b$ es solución de la ecuación de calor. Entonces, vamos a tomar como solución general, la función $w(x,t)$ definida como siguiente:

$$w(x,t) = ax + b + w_0(x,t) \tag{6.26}$$

Imponiendo las C.F., obtenemos

$$\begin{aligned} T_0 &= b && (6.27) \\ T_1 &= al + b && (6.28) \end{aligned}$$

lo que finalmente da,

$$w(x,t) = (T_1 - T_0)\frac{x}{l} + T_0 + w_0(x,t) \tag{6.29}$$

En lo que concierne a la condición inicial, si $w(x,0) = h(x)$, tenemos que imponer a w_0 la condición inicial siguiente:

$$w_0(x,0) = h(x) - (T_1 - T_0)\frac{x}{l} - T_0 \tag{6.30}$$

y proceder como antes.

6.1.3 Caso elíptico: ecuación de Laplace

Usando siempre el mismo métódo, vamos a estudiar la ecuación de Laplace a dos dimensiones:

$$\triangle_2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{6.31}$$

en un rectángulo $0 \le x \le a, 0 \le y \le b$. Como visto al capítulo anterior, una solución de la ecuación de Laplace es univocamente determinada al interior del rectángulo por el dado de w sobre la frontera.

La ecuación (6.31) esta descibiendo por ejemplo un potencial electrostático determinado por el potencial sobre la frontera, o una distribución estacionaria de temperatura correspondiente a una distribución dada sobre la frontera.

Imponemos las C.F. siguientes:

$$\begin{aligned} w(0,y) &= w(a,y) = w(x,b) = 0 && (6.32) \\ w(x,0) &= f(x) && (6.33) \end{aligned}$$

(excepto si $f(0) = f(a)$, $w(x,y)$ es discontinua sobre la frontera, lo que no impide a la solución de ser armónica al interior del rectángulo).

Separamos las variables, buscando una solución de la forma

$$w(x,y) = u(x)v(y) \tag{6.34}$$

Obtenemos

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = -\frac{v''(y)}{v(y)} = -k^2 \tag{6.35}$$

lo que da las dos ecuaciones siguientes con las C.F. correspondientes:

$$u''(x) + k^2u(x) = 0 \quad , \quad u(0) = u(a) = 0 \tag{6.36}$$

$$v''(y) - k^2v(y) = 0 \quad , \quad v(b) = 0 \tag{6.37}$$

La solución de (6.36) es

$$u_n(x) = \sin k_nx, \;\; k_n = n\pi/a \;(n = 1, 2, ...) \tag{6.38}$$

Cuanto a (6.37), obtenemos

$$v_n(y) = Ae^{k_ny} + Be^{-k_ny} \tag{6.39}$$

Imponiendo las C.F., obtenemos

$$v_n(b) \;=\; Ae^{k_nb} + Be^{-k_nb} = 0 \tag{6.40}$$

$$\Rightarrow B \;=\; -Ae^{2k_nb} \tag{6.41}$$

Y entonces, tenemos

$$v_n(y) \;=\; Ae^{k_nb}(e^{k_n(y-b)} - e^{-k_n(y-b)}) \tag{6.42}$$

$$\;=\; C\sinh k_n(b-y) \tag{6.43}$$

Entonces, la solución general de (6.31) verificando las C.F (6.32) va a escribirse como:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh(k_n(b-y)) \sin k_nx \tag{6.44}$$

Imponiendo (6.33), obtenemos

$$w(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh k_nb \sin k_nx \tag{6.45}$$

es decir que c_n es igual al $n$ieme coeficiente de Fourier de $f(x)$ dividido por $\sinh k_nb$.

6.1.4 Resolución general de la ecuación de las ondas

Antes de acabar este sección, vamos a considerar el caso de la ecuación de ondas en general, que es de tipo hiperbólico:

$$\triangle w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, w \equiv w(\overrightarrow{x}, t). \tag{6.46}$$

Separamos las variables $w(\overrightarrow{x}, t) = u(\overrightarrow{x})f(t)$, lo que da

$$\frac{\triangle u}{u} = \frac{1}{c^2}\frac{f^{''}}{f} = -k^2, \text{ con } k \in C \tag{6.47}$$

Tenemos dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \triangle u + k^2 u &= 0 \text{ (ec. de Helmholtz)} \quad (6.48)\\ f^{''} + kc^2 f &= 0 \quad (6.49) \end{aligned}$$

La ecuación (6.49) tiene por solución:

$$f(t) = e^{i\omega t} f(0), \quad w = kc \in C \tag{6.50}$$

Esta solución representa una onda ordinaria si k es real, una onda amortida si k tiene una parte imaginaria: $k = k_1 + ik_2$, da en efecto, $f(t) = e^{ik_1 ct} e^{-k_2 ct} f(0)$.

Nos limitamos en las proximas secciones en el caso k real en la ecuación de Helmholtz (6.48), que es una ecuación de tipo elíptico, cuando la ecuación inicial estaba hiperbólica.

Vamos a estudiar varios casos:

(1) ***en dimensión 1***

$$u^{''} + k^2 u = 0 \tag{6.51}$$

Esta ecuación es del mismo tipo que lo que estudiamos en la sección anterior en detalles.

(2) ***en dimensión 2 o 3, en coordenadas cartesianas.***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \ u \equiv u(x, y) \tag{6.52}$$

Poniendo $u(x, y) = X(x)Y(y)$, obtenemos

$$\frac{X^{''}}{X} + \frac{Y^{''}}{Y} + k^2 = 0 \tag{6.53}$$

Vamos a escribir $\frac{X^{''}}{X} = -p^2$, $\frac{Y^{''}}{Y} = -q^2$ con $k^2 = p^2 + q^2$, lo que nos da las dos ecuaciones idénticas:

$$\begin{aligned} X^{''} + p^2 X &= 0 \quad (6.54)\\ Y^{''} + q^2 Y &= 0 \quad (6.55) \end{aligned}$$

Y el problema se vuelve a un problema de dimensión 1. El análisis es idéntico en tres dimensiones.

(3) ***en dimensión 2, en coordenadas polares.***

Usando la expresión del laplaciano $\triangle_2$ en coordenadas polares (r, ϕ), la ecuación de Helmholtz se escribe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2 u = 0, \ u \equiv u(r, \phi) \tag{6.56}$$

Como siempre, escribimos $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, y obtenemos

$$R^{''}\Phi + \frac{R^{'}}{r}\Phi + \frac{R}{r^2}\Phi^{''} + k^2 R\Phi = 0 \tag{6.57}$$

Y entonces,

$$r^2\frac{R^{''}}{R} + r\frac{R^{'}}{R} + k^2 r^2 = -\frac{\Phi^{''}}{\Phi} = m^2 \tag{6.58}$$

lo que da las dos ecuaciones siguientes:

$$\Phi^{''} + m^2\Phi \quad = \quad 0 \tag{6.59}$$

$$R^{''} + \frac{R^{'}}{r} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})R \quad = \quad 0 \tag{6.60}$$

La ecuación (6.59) tiene como solución $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$ pero necesita de restringirse a valores de m enteras para obtener una solución unievaluada por que, como ϕ es un ángulo, tenemos que imponer una condición de periodicidad:

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \Leftrightarrow m \in Z \tag{6.61}$$

Cuando a la ecuación (6.60), que se llama ***ecuación de Bessel*** tiene como solución las funciones de Bessel que son funciones transcendantes generalizando las funciones trigonométricas. Vamos a estudiarlas con más detalle en los próximos capítulos.

Sin embargo, la ecuación (6.60) puede resolverse de manera elemental en el caso $k = 0$, es decir en el caso de la ecuación de Laplace. En efecto, en este caso, la ecuación (6.60) se reduce a la ecuación siguiente:

$$R^{''} + \frac{R^{'}}{r} - m^2\frac{R}{r^2} = 0 \tag{6.62}$$

Esta ecuación es homogenea en r y entonces admite soluciones de la forma $R(r) = r^{\alpha}$. En efecto, tenemos para $m \neq m$

$$\left(\alpha(\alpha - 1) + \alpha - m^2\right) r^{\alpha - 2} = 0 \tag{6.63}$$

es decir que $\alpha = \pm m$. En el caso $m = 0$, nos quedamos con la ecuación $R^{''} + R^{'}/r = 0$ que tiene como solución $R(r) = c + d\ln r$.

Reunificando todos esos resultados, obtenemos la solución general de la ecuación de Laplace en dimensión 2:

$$u(r,\phi) = D\ln r + \sum_{m=0}^{\infty}(A_m r^m + B_m r^{-m})(C_m e^{im\phi} + D_m e^{-im\phi}) \quad (6.64)$$

Las diferentes constantes van a depender del problema sobre estudio. En general, tenemos que distinguir 3 casos

(i) problema interior: $0 \leq r \leq r_0$.
En este caso, el origen $r = 0$ hace parte del dominio considerado y tenemos que excluír las soluciones singulares al origen, es decir que tenemos que imponer $D = 0, B_m = 0\ \forall m \geq 0$. Nos quedamos con:

$$u_{int}(r,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{A_m r^m e^{im\phi} + A_m^{'} r^m e^{-im\phi}\right\} \quad (6.65)$$

lo que puede todavía escribirse, introduciendo la notación $z = re^{i\phi}$ y $\overline{z} = re^{-i\phi}$,

$$u_{int}(z,\overline{z}) = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{A_m z^m + A_m^{'}\overline{z}^m\right\} \quad (6.66)$$

Si, además, imponemos a la solución de ser real ($A_m^{'} = \overline{A}_m$), obtenemos,

$$u_{int}(z,\overline{z}) = 2Re\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m\right) \quad (6.67)$$

lo que comprueba muy bien que tenemos una función armónica. Y esta solución es determinada univocamente por sus valores a la frontera $r = r_0$:

$$u_{int}(r_0,\phi) = f(\phi) \quad (6.68)$$

lo que da

$$f(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} r_0^m\left\{A_m e^{im\phi} + A_m^{'} e^{-im\phi}\right\} \quad (6.69)$$

Los coeficientes $A_m, A_m^{'}$ son entonces determinados univocamente a partir de los coeficientes de Fourier de $f(\phi)$.

(ii) problema exterior: $r_0 \leq r \leq \infty$
En esto caso, tenemos que excluir los términos que diverge al infinito, lo que da $D = A_m = 0\ \forall m \geq 1$

$$\Rightarrow u_{ext}(r,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{-m}\left(B_m e^{im\phi} + B_m^{'} e^{-im\phi}\right) \quad (6.70)$$

lo demás de la discussión es análoga al caso precedente.

(iii) problemas intermediarios $0 < r_1 \leq r \leq r_2 < \infty$
En este caso, tenemos que guardar todas las constantes en la solución general. La solución es una función armónica en el anillo $r_1 \leq r \leq r_2$ univocamente determinada por las C.F.

$$\begin{aligned} u(r_1, \phi) &= f_1(\phi) & (6.71) \\ u(r_2, \phi) &= f_2(\phi) & (6.72) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si tomamos el caso a simetría axial, tenemos $f_1(\phi) =$ constante y $f_2(\phi) =$ constante y el único término de la solución general que sobrevive a las C.F. es el término $m = 0$:

$$u_{int}(r) = C + D \ln r \tag{6.73}$$

con $C + D \ln r_1 = f_1, C + D \ln r_2 = f_2$, lo que determina C y D.

(3) ***en dimensión 3, en coordenadas esféricas.***
El analisis es similar. Expresando $\triangle_3$ en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), la ecuación de Helmholtz va a escribirse como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Theta_{\theta,\phi} u + k^2 u = 0 \tag{6.74}$$

donde $\Theta_{\theta,\phi}$ es el operador diferencial en θ y ϕ. Separando las variables $u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$, tenemos

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + k^2 r^2 = -\frac{\Theta_{\theta,\phi} Y}{Y} = l(l+1) \tag{6.75}$$

Obtenemos entonces las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \Theta_{\theta,\phi} Y + l(l+1)Y &= 0 & (6.76) \\ R'' + \frac{2}{r}R' + (k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2})R &= 0 & (6.77) \end{aligned}$$

La ecuación (6.76) admite soluciones regulares en el caso $l = 0, 1, 2, ...$ (es la razón po la cual llamamos $l(l+1)$ la constante de separación). Estas soluciones, llamadas ***armónicas esféricas*** van a ser estudiadas mas tarde. Cuanto a la ecuación (6.77), es de nuevo una ecuación de Bessel.

Aquí, también podemos escribir la solución solamente en el caso $k = 0$, es decir de Laplace.

$$\begin{aligned} R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{l(l+1)}{r^2}R &= 0 \\ R = r^\beta \Rightarrow \{\beta(\beta-1) + 2\beta - l(l+1)\} r^{\beta-2} &= 0 \\ \Rightarrow \beta(\beta-1) &= l(l+1) \\ \beta = l \quad &\text{o} \quad \beta = -(l+1) \\ \Rightarrow R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \quad &, \quad l = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Lo demás del análisis es idéntica al caso precedente y también aquí tenemos que distinguir entre problemas interiores, exteriores y intermediarios.

6.2 Sistemas no acotados

6.2.1 Propagación de una onda sin o con dispersión

Las diferentes ecuaciones derivadas parciales que clasificamos anteriormente pueden escribirse sobre la forma general:

$$L^{(n)}w + L^{(n-1)}w + ... + L^{(0)}w = 0 \tag{6.78}$$

donde$L^{(k)}$ es el conjunto de los términos conteniendo las derivadas de orden k en las variables $t, x, y, ...$. Vamos a limitarnos al caso unidimensional y a las ecuaciones de orden al máximo igual a 2 pero el argumento es general.

Llamamos ***ondas progresivas***, una solución de la ecuación (6.78) de forma $w(x,t) = f(x - vt)$, donde v es una constante. Ella representa una onda que se propaga a lo largo de x, con velocidad v, sin cambiar de forma. La pregunta es de saber cuando la ecuación (6.78) admite tal solución. Notando que $\frac{\partial w}{\partial x} = f^{'}(x - vt)$ y que $\frac{\partial w}{\partial t} = -vf^{'}(x - vt)$, vemos que (6.78) implica:

$$P_n(v)f^{(n)} + P_{n-1}(v)f^{(n-1)} + ... + P_0(v)f = 0 \tag{6.79}$$

donde $P_k(v)$ es un polinomio de orden k en v. Dos casos pueden presentarse:

(i) **un solo término (6.79) no es identicamente cero.**

Entonces (6.79) se escribe como

$$P_k(v)f^{(k)}(x - vt) = 0 \tag{6.80}$$

Si la ecuación $P_k(v) = 0$ admite una raíz v_0, entonces $f(x-v_0t)$ es solución de (6.78)., por cualquier función f. La onda se propaga entonces a la velocidad v_0, independientemente de su forma. En tal caso, hablamos de ***propagación sin dispersión***.

ejemplo: la cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{6.81}$$

Poniendo $w(x,t) = f(x - vt)$, obtenemos

$$(1 - \frac{v^2}{c^2})f^{''} = 0 \tag{6.82}$$

Entonces, $v = \pm c$ son las raices buscadas y la solución general de la ecuación de la cuerda vibrante es entonces,

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{6.83}$$

El primer término representa una onda x propagándose verso a la derecha con velocidad c, el segundo, una onda propagandose verso a la izquierda con la misma velocidad, en los dos casos sin deformación.

Es d'Alembert (1746) quien fue el primero a encontrar esta solución. Tal solución es univocamente determinada por sus datos de Cauchy:

$$w(x,0) \equiv h(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{6.84}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \equiv g(x) = -c(f_1'(x) - f_2'(x)) \tag{6.85}$$

Estas dos relaciones permiten determinar f_1 and f_2 en función de $h(x)$ y $\int^x g(x)dx$.

(ii) **hay varios términos de (6.78) no-identicamente nulos.**

Entonces, hay varios polinomios $P_k(v)$ no-cero en (6.79). Para v fijo, esta relación diferencial ordinaria en f, a coeficientes constante. La solución de tal ecuación es una superposición de exponenciales complejas: la onda es sinusoidal amortida, y la velocidad de propagación depende de la longitud de onda.

Vamos a decir que en este caso, hay ***propagación con dispersión***, por que la onda se deforma cuando se mueve.

ejemplo: la ecuación de calor:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{6.86}$$

Una solución sinusoidal es una solución de la forma:

$$w(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \tag{6.87}$$

donde $\omega = \omega(k)$ representa la frecuencia y $w/k = v$, la velocidad. Usando esta expresión en la ecuación de calor, tenemos

$$-k^2 + i\frac{\omega}{\alpha} = 0 \text{ o } \omega(k) = -i\alpha k^2 \tag{6.88}$$

lo que da $k = \pm\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}(1+i)$ por que $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$(vamos a suponer que la frecuencia es real). Las soluciones reales son entonces:

$$f_+(x) = e^{-x/L}\cos(\frac{x}{L} - \omega t + \phi) \tag{6.89}$$

$$f_-(x) = e^{-x/L}\cos(\frac{x}{L} + \omega t + \phi) \tag{6.90}$$

$$\frac{1}{L} = \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \tag{6.91}$$

donde ϕ es una fase arbitraria. La solución f_+ es una onda que se propaga verso $x = +\infty$, f_- se propaga verso $x = -\infty$ y las dos ondas son amortidas exponencialemente. La cantidad $L = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$ se llama *profundidad de penetración*: ella esta mediando la distancia al fin de la cual la amplitud a decrecida de un factor e, esta distancia cambia como la raiz inversa de la frecuencia. Eso significa que las ondas de alta frecuencia son menos amortidas que las ondas de alta frecuencia. Eso se aplica por ejemplo a la penetración de ondas térmicas en el suelo: las variaciones anuales de temperatura penetran a una profundidad más o menos 20 veces más grande que las variaciones diurnas de temperatura.

6.2.2 Ejemplo de fenómeno de dispersión

El ejemplo típico de fenómeno de dispersión es el caso de la propagación de la luz en un medio material. La velocidad de propagación de la luz en un medio material depende de su frecuencia. Para decirlo de otra manera, la luz blanca va a dispersarse en sus diferentes componentes cuando paso a través de un medio material, es el ejemplo del prismo de Newton.

Un otro ejemplo de fenómeno de dispersión nos es dado por ***la ecuación de los telegrafistas*** que vamos a derivar.

Consideramos dos cables paralelos y llamamos C su capacidad, L su self-inductancia y R su resistencia por unidad de longitud.

Sea $I(x,t)$, la corriente eléctrica circulando en el cable y $-I(x,t)$ la corriente circulando en el otro cable. $V = V(x,t)$ es la diferencia de potencial entre los dos cables. Suponemos que la isolación no es perfecta y que una cantidad de carga gV por segundo pasa de un cable al otro.

La conservación de La carga se escribe:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + C\frac{\partial V}{\partial t} + gV = 0 \tag{6.92}$$

donde el segundo término es la carga acumulada (condensador) y el tercera la perdida por segundo. La caída de tensión por unidad de longitud vale:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0 \tag{6.93}$$

donde el segundo término es la caída de potencial por self-inductancia y el tercero la caída debida a la resistancia.

Eliminando I entre esos dos ecuaciones, obtenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (gL + RC)\frac{\partial V}{\partial t} - RgV = 0 \tag{6.94}$$

Definimos los parametros:

$$LC \equiv \frac{1}{c^2}, \ \frac{R}{L} = \alpha, \ \frac{g}{C} = \beta \tag{6.95}$$

que contienen las características físicas de la línea; c tiene la dimension de una velocidad, α y β son pequeños. Así tenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \left(\frac{\alpha + \beta}{c^2}\right)\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\alpha\beta}{c^2}V = 0 \tag{6.96}$$

que llamamos la ***ecuación de los telegrafistas***. Encontramos la ecuación de onda con un término de amortización en $(\alpha+\beta)$ y un término de dispersion en $(\alpha\beta)$. Para eliminar el término de amortización, podemos introducir una función $v(x,t)$ por la relación:

$$V(x,t) = e^{\gamma t} v(x,t) \tag{6.97}$$

Substituendo (6.97) en la ecuación (6.96), podemos ver que el término de amortización se anula cuando $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. La función v verifica entonces la ecuación reducida siguiente:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(\frac{\alpha-\beta}{2c}\right)^2 v = 0 \tag{6.98}$$

quien tiene siempre de la dispersión excepto cuando $\alpha = \beta$. En efecto, introduciando en (6.98) una solución sinusoidal de la forma

$$v(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \tag{6.99}$$

Y obtenemos

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{\alpha-\beta}{2c}\right)^2 = 0 \tag{6.100}$$

$$\Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \left(\frac{\alpha-\beta}{2c}\right)^2} \tag{6.101}$$

Para $\alpha = \beta$, tenemos $k = \pm\omega/c$, es decir que $\omega = \pm kc$ y no hay dispersión. Para $\alpha \neq \beta$, la velocidad de propagación, ω/k, cambia con k y la onda se deforma. Asi tenemos que escoger las caracteristicas de la linea tal que $(\alpha-\beta)/2c$ sea lo mas pequeño que posible!

Un otro ejemplo de propagación con dispersión es la *propagación de las ondas a la superficie del agua*.

Sea un canal de profundidad h, considerado como unidimensional. Aplicando las leyes de la hidrodinámica, obtenemos que las ondas pueden propagarse a la superficie de este canal a la velocidad:

$$v(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{gh\frac{\tanh kh}{kh}} \tag{6.102}$$

con g, la constante de gravitación. Si el canal es de pequeña profundidad, $kh \ll 1$, tenemos que $\tanh kh \approx kh$ y encontramos una velocidad constante $v = \sqrt{gh}$ y no hay dispersión. A contrario, en agua profunda $kh \gg 1$, tenemos que $\tanh kh \approx 1$ y $v \approx \sqrt{g/k}$, y hay dispersión.

Citamos todavia dos otros ejemplos de ecuaciones con dispersion:

(i) ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - m^2\Psi = 0 \tag{6.103}$$

que describe una particula relativista de masa m y de spin 0 (la dispersión viene del término proporcional a m^2.

(ii) ecuación de la barra vibrante:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{6.104}$$

Por esta ecuación, tenemos $\omega(k) = \pm ck^2$, entonces hay dispersión.

En hecho, el fenómeno de dispersión es la regla más que la excepción para las ecuaciones lineales. Unicamente las ecuaciones lo más sencillas pueden escapar a la dispersión. Entonces, la única manera de tener una propagación sin deformación es de usar una ***ecuación no-lineal***, por que en algunos casos, la no-linealdad puede compensar la dispersión y la ecuación admite soluciones describiendo propagación de ondas sin deformación, llamadas ***"solitons" o ondas solitarias***. Los dos casos más conocidos son:

(i) ecuación de Korteweg- de Vries (1895)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{6.105}$$

que describen ondas a la superficie de un canal poco profundo.

(ii) ecuacion de Sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sin u = 0 \tag{6.106}$$

que describe, por ejemplo, la propagación de una dislocación en un cristal.

El estudio de esas ecuaciones y de muchas del mismo tipo constituyen un campo de actividad intensa en la investigación actual tan por las aplicaciones fisicas que para sus propiedades matemáticas.

6.2.3 Forma general de las ondas progresivas

Podemos aplicar aquí también el principio de superposición. Si una ecuación de onda admite una solución sinusoidal de forma $e^{i(kx-\omega t)}$, con $\omega(k) = \omega$, la solución general de esta ecuación va a escribirse como:

$$w(x,t) = \int dk\widehat{g}(k)e^{i(kx-\omega t)} \tag{6.107}$$

donde $\widehat{g}(k)$ es una amplitud a determinar por la condición inicial:

$$w(x,0) = \int dk\widehat{g}(k)e^{ikx} \tag{6.108}$$

Esta ecuación significa que $w(x,0)$ es proporcional a la transformada de Fourier inversa de $\widehat{g}(k)$.

Tenemos que distinguir dos casos:

(1) ***sin dispersión***: $\omega = kv$ y tenemos

$$w(x,t) = \int dk\widehat{g}(k)e^{i(kx-\omega t)} = \sqrt{2\pi}g(x-vt) \tag{6.109}$$

donde $g(x)$ es la transformada de Fourier inversa de $\widehat{g}(k)$.

(2) ***con dispersión:***, podemos siempre escribir $\widehat{g}(k)$ como

$$\widehat{g}(k) = |\widehat{g}(k)|e^{i\alpha(k)} \tag{6.110}$$

Y podemos suponer que $|\widehat{g}(k)|$ tiene un pico pronunciado alrededor de $k = k_0$ de anchura δk, entonces tenemos

$$w(x,t) = \int dk|\widehat{g}(k)|e^{i\phi(k)} \tag{6.111}$$

con $\phi(k) = kx - \omega(k)t + \alpha(k)$. Si la función $e^{i\phi(k)}$ oscilla rapidamente en la región de anchura δk donde $|\widehat{g}(k)|$ es lo más importante, va a tener interferencias destructivas y $w(x,t)$ va a quedarse despreciados.

A contrario, eso no va a pasar si $\phi(k)$ varía poco en el dominio, es decir que $\frac{d\phi}{dk}|_{k=k_0} \approx 0$. Vamos a llamar **centro del tren de ondas**, el punto definido para la condición $\frac{d\phi}{dk}|_{k=k_0} = 0$, lo que da

$$x = t\frac{d\omega(k)}{dk}|_{k=k_0} - \frac{d\alpha}{dk}|_{k=k_0} \tag{6.112}$$

Este punto es animado de un movimiento lineal, de velocidad $v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}|_{k=k_0}$ que llamamos ***la velocidad de grupo del tren de ondas***. La cantidad $v_{ph} \equiv \frac{\omega(k)}{k}$ va a llamarse ***la velocidad de fase***.

La imagen física es sencilla: el tren de ondas se propaga deformándose pero su centro se mueve a velocidad constante v_g. Entonces, es la velocidad de grupo quien representa la velocidad de propagación de la señal y no la velocidad de fase.

Por ejemplo, en el caso de una ola de mar, la velocidad de la ola es dada por la velocidad de grupo, cuando la velocidad de fase representa la velocidad de propagación de las particulas de agua a dentro de la ola. Igualmente, en relativista especial, es prohibido a cualquier información de propagarse a velocidad superior a la velocidad de la luz. Esta restricción se aplica a la velocidad de grupo y no a la velocidad de fase.

En el caso de propagación sin dispersión, tenemos $\omega(k) = kv$ y entonces $\frac{d\omega}{dk} = v = constante$, y entonces $v_g = v_{ph}$. Si hay dispersión, tenemos siempre $v_g \neq v_{ph}$.

6.2.4 Ejemplo: difusión del calor sobre una barra infinita

Para acabar, vamos a resolver completamente la ecuación de calor:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} \tag{6.113}$$

sobre una barra infinita, con la condición inicial $w(x,0) = f(x)$. En este caso, sabemos que tenemos $\omega(k) = -i\alpha k^2$. Así, la solución general se escribe como:

$$w(x,t) = \int dk\widehat{g}(k)e^{ikx}e^{-\alpha k^2 t} \tag{6.114}$$

La solución quedando acotada para todo tiempo t. Podemos imponer ahora la condición inicial ($f(x)$ es de cuadrado integrable), tenemos

$$\begin{aligned} w(x,0) = f(x) = &= \int dk\widehat{g}(k)e^{ikx} && (6.115)\\ &= \sqrt{2\pi}g(x) && (6.116)\end{aligned}$$

O, para decir las cosas de manera diferentes, tenemos que

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}(k) \tag{6.117}$$

Entonces, la solución va a escribirse como:

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\widehat{f}(k)e^{ikx}e^{-\alpha k^2 t} \tag{6.118}$$

Esta forma puede todavía simplificarse usando el teorema de convolución:

$$\int dke^{ikx}\widehat{f}(k)\widehat{g}(k) = \int dyf(x-y)g(y) \tag{6.119}$$

Si nos recordamos que la transformada de Fourier inversa de $\widehat{h}(k) = e^{-a^2k^2/2}$ es $h(x) = \frac{1}{a}e^{-x^2/(2a^2)}$, encontramos

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dke^{iky}e^{-\alpha k^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}}e^{-\frac{y^2}{4\alpha t}} \tag{6.120}$$

Finalmente la solución del problema se escribe:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\int_{-\infty}^{\infty} dyf(x-y)e^{-\frac{y^2}{4\alpha t}} && (6.121)\\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\int_{-\infty}^{\infty} d\chi f(\chi)e^{-\frac{(x-\chi)^2}{4\alpha t}} && (6.122)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} due^{-u^2}f(x+u\sqrt{4\alpha t}) && (6.123)\end{aligned}$$

La solución del problema precedente nos da también la resolución del problema de la difusión de calor sobre una barra semi-infinita ($x \geq 0$).

Sea la distribución inicial $w(x,0) = f(x)$ para $x \geq 0$ y guardando la extremidad $x = 0$ a temperatura nula:$w(0,t) = 0$. Podemos prolongar la función $f(x)$ sobre el eje negativo por simetría: $(f(-x) = -f(x)$ para volver al problema anterior. La función prolongada es impar, entonces nula a $x = 0$ como se debe por las condiciones a la frontera pero la función $f(x)$ puede eventualmente ser discontínua en este punto.

Tomamos, por ejemplo, el caso de una distribución inicial constante, $f(x) = T_0$ para $x > 0$.

La distribución prolongada es entonces discontínua:

$$f(x) = \begin{cases} -T_0 \ (x < 0) \\ 0 \ (x = 0) \\ T_0 \ (x > 0) \end{cases} \tag{6.124}$$

La solución de este problema es dada por la ecuación (6.123) con la definición de $f(x)$ (ver ec. (6.124)). Así, tenemos como solución:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-u_0}^{\infty} e^{-u^2} du - \int_{-\infty}^{-u_0} e^{-u^2} du \right) && (6.125) \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-u_0}^{\infty} e^{-u^2} du - \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2} du \right) && (6.126) \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-u_0}^{u_0} e^{-u^2} du && (6.127) \\ &= \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x/\sqrt{4\alpha t}} e^{-u^2} du && (6.128) \end{aligned}$$

con $u_0 = x/\sqrt{4\alpha t}$.

Esta solución tiene las propiedades siguientes:

- $w(x,t)$ es $\mathcal{C}^\infty$ para $x > 0$ y $t > 0$.
- $w(0,t) = 0$ y $w(x,0) = T_0 \Rightarrow$ discontinuidad al origen.
- $w(x,t) =$ constante sobre cada parabóla $x = C\sqrt{4\alpha t}$, lo que corresponde a una onda progressiva con dispersión.
- para x fijo, $x \neq 0$, tenemos $\lim_{t\to\infty} w(x,t) = 0$
- para t fijo, $t \neq 0$, tenemos $\lim_{x\to\infty} w(x,t) = T_0$

Capitulo 7

Métodos diversos de resolución de ecuaciones diferenciales.

7.1 Método de Wronsky

7.1.1 Caso homogéneo

Sea una ecuación diferencial general de segundo grado a coeficiente variable:

$$y^{''}(x) + P(x)y^{'}(x) + Q(x)y(x) = 0 \tag{7.1}$$

Sea y_1 y y_2 dos soluciones diferentes de esta ecuación. y_1 y y_2 son linealemente dependiente si existe $\alpha, \beta \neq 0$ tal que

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \tag{7.2}$$

Y entonces,

$$\alpha y_1^{'}(x) + \beta y_2^{'}(x) = 0 \tag{7.3}$$

Eso es posible solamente si el determinante de los coeficientes de estas dos ecuaciones en α, β , es igual a cero:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.4}$$

Este determinante se llama el ***"Wronskiano"*** de las soluciones y_1 y y_2. Si $W(x) \neq 0$, y_1 y y_2 son linealmente independiente.

7.1.2 Propiedades del Wronskiano

Tenemos por definición,

$$W = y_1 y_2^{'} - y_2 y_1^{'} \tag{7.5}$$

Y entonces,

$$W^{'} = y_1 y_2^{''} - y_2 y_1^{''} \tag{7.6}$$

Usando la ecuación (7.1), tenemos

$$\begin{aligned} W^{'} &= -y_1(P y_2^{'} + Q y_2) + y_2(P y_1^{'} + Q y_1) && (7.7)\\ &= -P(y_1 y_2^{'} - y_2 y_1^{'}) && (7.8)\\ &= -PW && (7.9) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \ln W(x) = -P(x) \tag{7.10}$$

Podemos integrar fácilmente esta ecuación diferencial ordinaria y tenemos

$$W(x) = W(a) e^{-\int_a^x P(y)\ dy} \tag{7.11}$$

A notar que si $W(a) \neq 0$, entonces $W(x) \neq 0$ para todo x.

Muchas veces queremos obtener una segunda solución y_2 independiente a partir de una solución conocida y_1. Eso puede fácilmente hacerse usando las ecuaciones (7.5) y(7.10). Para llegar al resultado, podemos siempre escribir la segunda solución de la siguiente forma:

$$y_2(x) = y_1(x) f(x) \tag{7.12}$$

Entonces, la ecuación (7.5) se transforma como:

$$W(x) = y_1^2(x) f^{'}(x) \tag{7.13}$$

Y obtenemos

$$f(x) = \int_a^x dx \frac{W(x)}{y_1^2(x)} \tag{7.14}$$

En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int_a^x dy \frac{W(y)}{y_1^2(y)} && (7.15)\\ W(x) &= W(a) e^{-\int_a^x dy P(y)} && (7.16) \end{aligned}$$

7.1.3 Caso inhomogéneo

Sea la ecuación inhomogénea:

$$y^{''}(x) + P(x)y^{'} + Q(x)y = R(x) \tag{7.17}$$

Y suponemos que conocemos dos soluciones $\{y_1(x), y_2(x)\}$ de la ecuación homogénea, linealmente independientes. Vamos a buscar una solución de (7.17) de la siguiente forma:

$$y(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) \tag{7.18}$$

donde $v_1(x)$ y $v_2(x)$ son a determinar. Diferenciando la ecuación (7.18) en respecto a la variable x, tenemos

$$y^{'} = \left(v_1y_1^{'} + v_2y_2^{'}\right) + \left(v_1^{'}y_1 + v_2^{'}y_2\right) \tag{7.19}$$

Vamos a escoger una solución tal que el segundo término de (7.19) se anula, tal que

$$v_1^{'}y_1 + v_2^{'}y_2 = 0 \tag{7.20}$$

Diferenciando de nuevo (7.19) respecto a la variable x y usando esta expresión con las ecuaciones (7.18,7.19,7.20) y (7.17), obtenemos

$$v_1^{'}y_1^{'} + v_2^{'}y_2^{'} = R(x) \tag{7.21}$$

Ecuaciones (7.20) y (7.21) constituyen dos ecuaciones algebráicas a dos incognitas, $v_1^{'}(x)$ y $v_2^{'}(x)$. Resolviendo estas dos ecuaciones algebráicas, tenemos

$$v_1^{'}(x) = -\frac{y_2(x)R(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} \tag{7.22}$$

$$v_2^{'}(x) = \frac{y_1(x)R(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} \tag{7.23}$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el Wronskiano de la ecuación homogénea. Podemos integrar estas ecuaciones y obtenemos una solución particular de (7.17).

$$y(x) = -y_1(x)\int^x \frac{y_2(y)R(y)}{W(y_1(y), y_2(y))}dy + y_2(x)\int^x \frac{y_1(y)R(y)}{W(y_1(y), y_2(y))}dy \tag{7.24}$$

7.1.4 Ejemplo

Sea la ecuación

$$y^{''} + y = \csc x \tag{7.25}$$

a resolver. Las soluciones de la ecuación homogénea, $y'' + y = 0$ son $y_1(x) = \sin x$ y $y_2(x) = \cos x$. Entonces, el Wronskiano es igual a (-1). Usando la ecuación (7.24), obtenemos

$$v_1(x) = \int^x \frac{-\cos y \csc y}{-1} dy = \ln(\sin x) \tag{7.26}$$

$$v_2(x) = \int^x \frac{\sin y \csc y}{-1} dy = -x \tag{7.27}$$

Entonces, una solución particular de la ecuación no-homogénea es

$$y(x) = -\sin x \ln(\sin x) - x \cos x \tag{7.28}$$

7.2 Transformación integral sobre un dominio infinito

La idea general del método de transformación integral como método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales es de transformar la ecuación inicial de tal forma que la ecuación transformada sea más facil a resolver (por ejemplo, transformar una ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria). Una vez encontrada la solución de la ecuación transformada hacemos la transformación inversa para expresar la solución en el espacio inicial.

Después de encontrar la solución de la ecuación inicial por este método tenemos que verificar que la solución satisface los requisitos de la transformación. Por ejemplo, para una función tener su transformada de Fourier o de Laplace, esta función tiene que ser de cuadrado integrable (lo que significa que la función tiene que pertenecer a el espacio de Hilbert L^2).

Existen varios transformadas integrales. Ya vimos la transformación de Fourier que es un ejemplo típico de transformación integral. En esta sección, vamos a ver dos ejemplos de resolución de ecuaciones diferenciales, una usando la transformación de Laplace y la otra manera usando la transformación de Fourier. Pero, este método se puede generalizar a cualquier transformación integral. La elección del tipo de transformación va a depender sobre cual dominio la ecuación inicial tiene que ser resuelta. En caso de un dominio infinito, en general vamos a usar la transformación de Fourier. En el caso de un dominio semi-infinito, vamos a escoger más facilmente la transformación de Laplace[1].

7.2.1 Transformación de Laplace

La transformación de Laplace es definida como siguiente:

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \tag{7.29}$$

[1] Por otro tipo de dominio, podemos usar la transformación que se define sobre este dominio.Una lista de las transformaciones integral sobre dominio acotado o no-acotado puede encontrarse fácilmente en la literatura

donde $f(s)$ es la transformada de Laplace de $F(t)$ y las variable s y t son las variables conjugadas por la transformación de Fourier. También, podemos escribir

$$f(s) \equiv \mathcal{L}(F(t)) \tag{7.30}$$

La transformación inversa de Laplace es igual a

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} f(s) ds \tag{7.31}$$

donde σ es una constante arbitraria. Usualmente, escogemos σ suficientamente grande para que todos los polos de $f(s)$ sean a la izquierda del dominio de integración. Para calcular la transformada inversa de Laplace, tenemos que usar el teorema de los residuos y teorema de Cauchy.

Ahora, vamos a probar, usando la transformación de Fourier que esta definición de la transformada inversa de Laplace nos da el buen resultado.

Usando la definición de $f(s)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\ e^{st} ds & (7.32) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \int_0^{\infty} e^{s(t-u)} F(u)\ du\ ds & (7.33) \end{aligned}$$

Definiendo $s = \sigma + iv$, $ds = i\ dv$, esta ecuación se transforma en

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt} \int_0^{\infty} e^{-iuv} \left[e^{\sigma u} F(u) \right] du & (7.34) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt} \left(\widehat{e^{\sigma u} F(u)} \right)(v) & (7.35) \\ &= F(t) & (7.36) \end{aligned}$$

Para obtener este resultado, prolongamos la función $F(t)$ para $t < 0$ tal que $F(t < 0) = 0$ y usamos la definición de la transformación de Fourier y de su inversa.

Propiedades de la transformación de Laplace

1. Si $f(s) = \mathcal{L}(F(t))$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F^{'}(t)) &= sf(s) - F(0) & (7.37) \\ \mathcal{L}(F^{''}(t)) &= s^2 f(s) - sF(0) - F^{'}(0) & (7.38) \\ \mathcal{L}(F^{(n)}(t)) &= s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - ... - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

2. Si $f(s) = \mathcal{L}(F(t))$, tenemos

$$\mathcal{L}(t^n F(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) \tag{7.39}$$

3. Teorema de convolución para la transformación de Laplace.

   Sea $f(s)$ y $g(s)$, las transformadas de Laplace respect. de $F(t)$ y $G(t)$.

$$\begin{aligned} f(s)g(s) &= \int_0^\infty e^{-su}F(u)\;du\int_0^\infty e^{-sv}G(v)\;dv & (7.40)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(u)\;G(v)\;du\;dv & (7.41)\\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty F(u)\;G(t-u)\;du\right)\;dt & (7.42)\\ &= \mathcal{L}(F*G)(s) & (7.43)\end{aligned}$$

   donde para pasar la penultima línea, hicimos el cambio de variables $t = v+u)$, $u = u$.

Ejemplo

En el próximo ejemplo, vamos a ver como podemos usar la transformación de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales.

Sea la ecuación derivada parcial correspondiente a la difusión de calor,

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha u_{xx} \equiv \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.44}$$

con las condiciones iniciales y frontera siguientes:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 & (7.45)\\ u(0,t) &= u_0 \text{ para } t>0 & (7.46)\\ u(\infty,t) &= 0 \text{ para } t>0 & (7.47)\end{aligned}$$

u_0 es una constante.

Como este problema es definido en un dominio semi-infinito (t va a cambiar de 0 a ∞), podemos sospechar que la transformación de Laplace en t puede ser util para encontrar la solución de la ecuación de difusión de calor.

$$f(x,s) \equiv \mathcal{L}(u(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\;dt \tag{7.48}$$

Vamos a aplicar la transformación de Laplace sobre la ecuación (7.44) y usando las propiedades de la transformacón de Laplace, obtenemos

$$sf(x,t) - u(x,0) = \alpha\frac{\partial^2 f(x,s)}{\partial x^2} \tag{7.49}$$

También tenemos que tomar la transformada de Laplace de las condiciones iniciales y frontera:

$$\begin{aligned} f(0,s) &= \int_0^\infty e^{-st}u_0\;dt = \left(\frac{u_0}{s}\right) & (7.50)\\ f(\infty,s) &= 0 & (7.51)\end{aligned}$$

Usando la condición inicial sobre la ecuación (7.49), obtenemos la ecuación diferencial en x,

$$sf(x,s) = \alpha f_{xx}(x,s) \tag{7.52}$$

Una solución de esta ecuación puede encontrarse fácilmente y usando la condición frontera (7.51), obtenemos como solución de esta ecuación

$$f(x,s) = \frac{u_0}{s} e^{-x\sqrt{s/a}} \tag{7.53}$$

Usando las tablas de transformada inversa de Laplace, podemos hallar fácilmente la solución a la ecuación inicial

$$\begin{aligned} u(x,t) &\equiv \mathcal{L}(f(x,s)) &(7.54)\\ &= u_0 \left[1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)\right] &(7.55)\end{aligned}$$

La definición de la función especial $erf(x)$ es

$$erf(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\ dt \tag{7.56}$$

Así, la solución puede escribirse como

$$u(x,t) = u_0 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}} e^{-t^2}\ dt\right] \tag{7.57}$$

Es interesante de comparar esta solución con la solución (6.128).

Ahora que tenemos la solución final, tenemos que verificar que esta solución es bien una solución de la ecuación inicial y de las condiciones iniciales y frontera. También tenemos que verificar que cada etapas que hicimos para obtener la solución sean justificadas. En este caso, tenemos que verificar que la solución es de cuadrado integrable y claramente, la solución satisface esta condición.

7.2.2 Transformación de Fourier

No vamos a repetir en esta sección las propiedades de la transformación de Fourier (por eso, ver capitulo 4). Nadamás, vamos a recordar las principales propiedades de la transformación de Fourier que usamos en este tipo de método de resolución de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \widehat{f'} &= ik\widehat{f} &(7.58)\\ x\ \widehat{f(x)} &= i\frac{d\widehat{f}}{dk} &(7.59)\\ \widehat{\frac{d^n f}{dx^n}} &= (ik)^n \widehat{f} &(7.60)\\ x^n\widehat{f(x)} &= i^n \frac{d^n\widehat{f}}{dk^n} &(7.61)\end{aligned}$$

También, lo que vamos a usar muy frecuentemente es el teorema de convolución:

$$\left(\sqrt{2\pi}\right)^n \widehat{f.g} = \widehat{f} * \widehat{g} \quad (7.62)$$

$$\widehat{f * g} = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \widehat{f}.\widehat{g} \quad (7.63)$$

para $\overrightarrow{x} \in R^n$.

Un ejemplo típico de resolución de ecuaciones diferenciales usando la transformación de Fourier es el ejemplo de la ecuación de Poisson (ver capitulo 5)

$$\triangle f(\overrightarrow{x}) = \rho(\overrightarrow{x}) \quad (7.64)$$

7.3 Método de la funcion de Green

El objectivo de esto método es dar la solución de una ecuación diferencial parcial sobre la forma de un integral. En esta sección vamos a generalizar la noción de función de Green que introducimos en el capitulo 5 para el operador diferencial del laplaciano.

Aquí, vamos a generalizar este método para cualquier operador diferencial.

Suponemos que tenemos una ecuación diferencial linela para $u(\overrightarrow{x})$ y $\overrightarrow{x} \in \Omega \subseteq R^n$,

$$L[u(x)] = f(x) \quad (7.65)$$

donde $L[.]$ es un operador diferencial. También tenemos las condiciones frontera e iniciales que se pueden escribir como

$$B_i[u] = a_i \quad (7.66)$$

para $i = 1, 2, ..n$. Y suponemos que podemos resolver las ecuaciones siguientes

$$L[G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})] = \delta(\overrightarrow{x}\overrightarrow{z}) \quad (7.67)$$

$$B_i[G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})] = 0 \quad (7.68)$$

La función $G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})$ va a llamarse ***función de Green del operador*** $L[.]$ ***sobre el dominio*** Ω. En este caso, es fácil de verificar que la solución de la ecuación inicial va a poder escribirse como

$$u(\overrightarrow{x}) = \int_\Omega G(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) f(\overrightarrow{y}) d\overrightarrow{y} + f_1(\overrightarrow{x}) \quad (7.69)$$

donde $f_1(x)$ es una solución de la ecuación homogénea

$$L[f_1] = 0 \quad (7.70)$$

con condiciones frontera,

$$B_i[f_1] = a_i \quad (7.71)$$

Inversamente podemos resolver una ecuación del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} L[v(\overrightarrow{x})] &= 0 && (7.72)\\ B(v) &= h(\overrightarrow{x}) && (7.73)\end{aligned}$$

En este caso, si podemos encontrar la función $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})$ tal que

$$\begin{aligned} L[g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})] &= 0 && (7.74)\\ B[g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})] &= \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}) && (7.75)\end{aligned}$$

Entonces, la solución de la ecuación inicial va a escribirse como

$$v(\overrightarrow{x}) = \int_{\Omega} g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) h(\overrightarrow{z}) d\overrightarrow{z} \tag{7.76}$$

donde $d\overrightarrow{z} \equiv d^n z$. $g(x, z)$ ***se llama también función de Green del operador*** $L[.]$ ***sobre el dominio*** Ω***.***

7.3.1 Ejemplo

Vamos a derivar la solución de la difusión de calor en una barra infinita usando el método de la función de Green. Claramente, tenemos que encontrar la misma solución que encontramos en el capitulo 6.

Sea la ecuación de difusión de calor

$$\alpha u_{xx} = u_t \tag{7.77}$$

con condiciones inicial y frontera

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(\infty, t) = 0 \tag{7.78}$$

Usando el método de la función de Green, queremos escribir la solución $u(x, t)$ como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t, z)\ h(z)\ dz \tag{7.79}$$

donde $g(x, t, z)$ es la función de Green del operador diferencial $L[.]$ correspondiente a la ecuación de difusión del calor,

$$L[.] = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7.80}$$

Así, por definición, $g(x, t, z)$ tiene que satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} L[g(x, t, z)] &= g_t(x, t, z) - \alpha g_{xx}(x, t, z) = 0 && (7.81)\\ g(x, 0, z) &= \delta(x - z) && (7.82)\end{aligned}$$

Aplicando la transformación de Fourier (en la variable x) de la ecuación para $g(x, t, z)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{g}(k, t, z)}{dt} &= -\alpha k^2 \widehat{g}(k, t, z) && (7.83)\\ \widehat{g}(k, 0, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikz} \equiv \delta(\widehat{x - z}) && (7.84)\end{aligned}$$

Esta ecuación es fácil a resolver y obtenemos como solución

$$\widehat{g}(k,t,z) = \widehat{g}(k,0,z)e^{-\alpha k^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikz}e^{-\alpha k^2 t} \tag{7.85}$$

Usando la transformación de Fourier inversa, podemos encontrar la función de Green $g(x,t,z)$

$$\begin{aligned} g(x,t,z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(k,t,z)e^{ikx}dk & (7.86)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha k^2 t}e^{ik(x-z)}dk & (7.87)\\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}e^{-(x-z)^2/(4\alpha t)} & (7.88)\end{aligned}$$

donde para pasar a la última línea, usamos el resultado siguiente

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{a^2k^2/2}) = \frac{1}{a}e^{-x^2/(2a^2)} \tag{7.89}$$

donde $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(k)$ significa aplicar la transformación de Fourier inversa a la función $\widehat{f}(k)$.

Entonces, la solución de la ecuación de la difusión de calor sobre una barra infinita es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\int_{\infty}^{\infty}h(z)e^{-(x-z)^2/(4\alpha t)}dz \tag{7.90}$$

a comparar con la solución (6.123) que obtenemos usando otro método de resolución.

7.4 Ejemplo

Vamos en esta sección a resolver la ecuación de la cuerda vibrante usando la transformación de Laplace y el método de Wronsky.

Sea la ecuación

$$w_{tt}(x,t) = c^2 w_{xx}(x,t) \tag{7.91}$$

para $0 \leq x \leq 1$ y $t > 0$ y con las condiciones inicial y frontera siguiente:

$$\begin{aligned} w(0,t) &= w(1,t) = 0 & (7.92)\\ w(x,0) &= F(x) & (7.93)\\ w_t(x,0) &= 0 & (7.94)\end{aligned}$$

Primero, vamos a reescribir la ecuación inicial de la siguiente manera:

$$w_{tt} = w_{xx} \tag{7.95}$$

Para obtener el resultado final, vamos nadamás a tener que sustituir t por ct. Aplicando la transformación de Laplace en la variable t, obtenemos

$$s^2 f(x,s) - sw(x,0) - w_t(x,0) = f_{xx}(x,s) \tag{7.96}$$
$$s^2 f(x,s) - sF(x) = f_{xx}(x,s) \tag{7.97}$$

con las condiciones frontera:

$$f(0,s) = 0 \tag{7.98}$$
$$f(1,s) = 0 \tag{7.99}$$

donde $f(x,s) \equiv \mathcal{L}(w(x,t))$. Podemos encontrar una solución particular de esta ecuación usando el método de Wronsky. En efecto, las soluciones independientes de la ecuación homogénea $f_{xx} - s^2 f = 0$, pueden escribirse como

$$y_1(x) = \cosh sx \tag{7.100}$$
$$y_2(x) = \sinh sx \tag{7.101}$$

El wronskiano de estas soluciones es igual a s. Así una solución particular es igual a

$$\begin{aligned} y(x,s) &= \cosh(sx)\int_0^x \sinh(sy)F(y)\ dy - \sinh(sx)\int_0^x \cosh(sy)F(y)\ dy \\ &= -\int_0^x \sinh\left((x-y)s\right)\ F(y)\ dy \end{aligned} \tag{7.102}$$

Asi, una solución general de la ecuación para $f(x,s)$ va a escribirse como la suma de las soluciones de la ecuación homogénea más la solución particular de la ecuación no-homogénea.

$$f(x,s) = A\cosh(sx) + B\sinh(sx) - \int_0^x \sinh\left((x-y)s\right)\ F(y)\ dy \tag{7.103}$$

Ahora, tenemos que imponer las condiciones a la frontera,

$$f(0,s) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \tag{7.104}$$
$$f(1,s) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \int_0^1 \frac{\sinh(s(1-y))F(y)}{\sinh s} dy \tag{7.105}$$

Entonces, tenemos como solución

$$f(x,s) = \int_0^1 F(y)\frac{\sinh(s(1-y))}{\sinh s}\sinh(sx)dy - \int_0^x F(y)\sinh(s(x-y))dy \tag{7.106}$$

Tenemos que encontrar la transformada inversa de Laplace. Por eso, vamos a usar la formula de inversión compleja de la transformación inversa de Laplace y el teorema de los residuos

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} f(x,s)\ ds \tag{7.107}$$

Esta integral, usando el teorema de Cauchy es igual a la suma de los residuos en los polos simples. Podemos fácilmente ver que el primer término de (7.106) tiene polos simples para $s = n\pi i$. A contrario, el segundo término no tiene polo y entonces su contribución a la integral es nula. Así, tenemos

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n\pi i t} Res(f(x,s), n\pi i) \tag{7.108}$$

Para calcular esos residuos, tenemos que recordar que si una función $q(z) = r(z)/\phi(z)$ tiene un polo de primer grado en z_0 y si $r(z_0) \neq 0$, tenemos

$$Res(q(z), z_0) = \frac{r(z_0)}{\phi'(z_0)} \tag{7.109}$$

Aplicando esto al cálculo de la solución $u(x,t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi t} \int_0^1 F(y) \frac{\sin(n\pi(1-y))\sin(n\pi x)}{\cos(n\pi)} & (7.110)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi t} \left(\int_0^1 F(y)\sin(n\pi y)dy \right) \sin(n\pi x) & (7.111)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi t)\sin(n\pi x) \left(2\int_0^1 F(y)\sin(n\pi y)dy \right) & (7.112) \end{aligned}$$

Podemos comparar esto resultado a la solución (6.10) y (6.13). En efecto, si prolongamos la función $F(x)$ de manera impar sobre el intervalo $[-1,1]$ tal que

$$F(x) = -F(-x) \text{ para } -1 \leq x \leq 0 \tag{7.113}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 F(y)\sin(n\pi y)dy &= \int_{-1}^1 F(y)\sin(n\pi y)dy & (7.114)\\ &= \beta_n & (7.115) \end{aligned}$$

donde β_n es el coeficiente de Fourier de $F(x)$ sobre el intervalo $[-1,1]$. Así nuestro resultado es consistente con la solución de la ecuación de la cuerda vibrante usando el método de separación de variables (ver capitulo 6).

Capitulo 8

Geometría y separación de variables

Varios problemas de física están descrito escencialmente por las mismas ecuaciones, ecuaciones lineales basadas sobre el laplaciano en dimensión 1,2, o 3 (al menos en la aproximación lineal, describiendo fenómeno de intensidad débil, es decir de energía débil) Excepción: las ecuaciones de elasticidad (en $\triangle\triangle$: 4o grado), ecuaciones de la mecánica de los fluídos (Navier-Stokes, no-lineal).

Entonces, lo que va diferenciar los problemas son ***las condiciones a la frontera de la región*** Ω considerada, así que las condiciones iniciales si necesarias.

Un papel escencial esta jugado, en la resolución de las ecuaciones, por la geometría de Ω. Es la geometría de Ω que va a determinar las propiedades de simetría del problema y de sus soluciones. Aquí aparece toda la importancia de la elección de un "buen" sistema de coordenadas adaptada a la geometría del problema.

De manera general, los problemas físicos van a repartirse en tres grandes clases correspondiente respectivamente a un tipo de geometría:

- cartesiana: problema a una dimensión.
- cilíndrica: problema a dos dimensiones.
- esférica: problema a tres dimensiones.

A Cada clase corresponden una o varias familias de funciones especiales y también corresponden un tipo de simetría propia (grupo de invariancia de la geometría) y un sistema de coordenadas adaptada.

Vamos a pasar la revisión de los 3 tipos de geometría.

1. ***geometría cartesiana (problema a una dimensión)***

   * tipo de problema:

-cuerda vibrante;
-membrana vibrante cuadrada o rectangular;
-ecuación de Schrodinger (1 dim.);
-oscillator armónica (1,2,3 dimensiones);
- difusión de calor (1 dim.).

* funciones especiales asociadas:
- funciones trigonométricas (+ generalizaciones)
- exponenciales, funciones hiperbolicas.
-polinomios y funciones de Hermite.

* simetría: reflexión : $x \to -x$

* coordenadas: cartesianas (x, y, z)

2. ***geometría cilíndrica***

* tipo de problemas:
-membrana vibrante circular o anular;
-guía de ondas: propagación de ondas;
-ondas estacionarias: tuberia de un órgano;
-calor: difusión en una base cilíndrica;
-óptica: difracción por una apertura circular.
-generalización: problemas a sección elípticas.

* funciones especiales asociadas:
- funciones de Bessel (parte radial)
- funciones logaritmicas (parte radial)
- funciones trigonométricas (parte angular)

* simetría: $SO(2), E(2)$

* coordenadas: cilíndricas (r, ϕ, z) + elípticas.

3. ***geometría esférica***

* tipo de problema:
-hidrodinámica : esfera en un fluído, vibración de una guta, vibración a dentro de una estrella.
-física del sólido: vibración de la tierra, ondas sísmicas (propagación, difracción en las discontinuidades).
-mecánica cuántica: téoría de la difusión del átomo de Hidrógeno.
-calor: difusión en una esfera (temperatura a dentro de una estrella)

* funciones especiales asociadas:
- funciones de Bessel esféricas (parte radial).
- polinomios de Laguerre (parte radial del átomo de H).
- armónicas esféricas (parte angular).

* simetría: $SO(3), E(3)$
* coordenadas: esféricas + elipsoidales.

A cada de esos tres casos son asociados una o varias familias de funciones especiales que tienen todas propiedades similares. En efecto, estas propiedades tienen un origen común relacionada a los dos hechos siguientes:

(i) las funciones especiales son funciones propias de un operador "auto-adjunto", ligado a el laplaciono sobre Ω, lo que significa que siempre vamos a tener para las funciones especiales:

- soluciones de una ecuación a valor propio.
- spectra real y discreto.
- relaciones de ortogonalidad

(ii) relacionados a una representación irreductible del grupo de simetría del problema $(SO(2), E(2), SO(3), E(3), ...)$ lo que implica

- un teorema de adición
- relación de recurencia
- función generadora.

Como ejemplo, vamos a estudiar la ecuación de Helmholtz en los 3 casos:

$$\triangle u + k^2 u = 0 \tag{8.1}$$

8.1 Ecuación de Helmoltz en coordenadas cartesianas

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8.2}$$

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{8.3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0 \tag{8.4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -k_1^2 \tag{8.5}$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_2^2 \tag{8.6}$$

$$\frac{Z''}{Z} = -k_3^2 \tag{8.7}$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 \tag{8.8}$$

$$\Rightarrow \quad X'' + k_1^2 X = 0 \Rightarrow X = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x \tag{8.9}$$

8.2 Ecuación de Helmoltz en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \tag{8.10}$$

$$u(r, \phi, z) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \tag{8.11}$$

$$\Rightarrow \frac{R^{''}}{R} + \frac{1}{r}\frac{R^{'}}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi^{''}}{\Phi} + \frac{Z^{''}}{Z} + k^2 = 0 \tag{8.12}$$

- $\frac{\Phi^{''}}{\Phi} = -m^2 \Rightarrow \Phi = Ae^{im\phi} + Be^{-im\phi}$
  (periodicidad: $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \Longleftrightarrow m \in Z$)
- $\frac{Z^{''}}{Z} + k^2 = \alpha^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z &= {}^{C}e^{\sqrt{\alpha^2-k^2}z} + De^{-\sqrt{\alpha^2-k^2}z} && (8.13) \\ &= C^{'}\cosh\sqrt{\alpha^2 - k^2}z + D^{'}\sinh\sqrt{\alpha^2 - k^2}z && (8.14) \end{aligned}$$

  (funciones hiperbolicas si $\alpha^2 > k^2$, lineales si $\alpha^2 = k^2$, trigonométricas si $\alpha < k^2$)

- $R^{''} + \frac{1}{r}R^{'} + (\alpha^2 - \frac{m^2}{r^2})R = 0$
  Sea $\alpha r = \rho$ ($\alpha \neq 0$), entonces, la ecuación radial va a transformarse como

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho} + (1 - \frac{m^2}{\rho^2})R = 0 \tag{8.15}$$

  Esta ecuación, llamada ***ecuación de Bessel de orden*** m, tiene como soluciones ***las funciones de Bessel o más generalmente las funciones cilíndricas, notadas genéricamente*** $Z_m(\rho)$. Vamos a estudiarlas mas en detalle en los próximos capítulos.

8.3 Ecuación de Helmoltz en coordenadas esféricas

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}D_{\theta,\phi} \tag{8.16}$$

con

$$D_{\theta,\phi} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{8.17}$$

La ecuación de Helmholtz se escribe entonces como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial uu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}D_{\theta,\phi}u + k^2 u = 0 \tag{8.18}$$

Sea $u(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$, tenemos

$$\frac{R^{''}}{R} + \frac{2}{r}\frac{R^{'}}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{D_{\theta,\phi}Y}{Y} + k^2 = 0 \tag{8.19}$$

- $D_{\theta,\phi}Y + l(l+1)Y = 0$ tiene como soluciones las armónicas esféricas $Y_l^m(\theta,\phi)$, $l = 0,1,2,...$
- $R^{''} + \frac{2}{r}R^{'} + (k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2})R = 0$

  Sea $kr = \rho$, obtenemos

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2})R = 0 \tag{8.20}$$

  Esta ecuación es parecida a la ecuación de Bessel pero difiero por el factor 2 en frente del término $\frac{dR}{d\rho}$. Podemos regresar a la forma de la ecuación de Bessel usando la sustitución siguiente:

$$R(\rho) = \rho^{\alpha}S(\rho) \tag{8.21}$$

  Eso va a dar para el término en $S^{'}$: $(2\alpha+2)\rho^{\alpha-1}S^{'}$. Usando el valor de $-1/2$ para α, obtenemos la ecuación de Bessel

$$S^{''} + \frac{1}{\rho}S^{'} + (1 - \frac{(l+1/2)^2}{\rho^2}S = 0 \tag{8.22}$$

  Las soluciones de la ecuación radial son entonces las funciones de Bessel de orden $(l+1/2)$ quien es semi-entero como l es entero por la téoría de las armónicas esféricas.

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{l+1/2}(kr) \tag{8.23}$$

  Estas funciones se llaman ***funciones de Bessel esféricas***.

Es interesante hacer el mismo cálculo para un espacio de dimensión cualquier d. En este caso, la ecuación radial se escribe

$$\frac{d^2r}{d\rho^2} + \frac{d-1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (1 - \frac{l(l+d-2)}{\rho^2})R = 0 \tag{8.24}$$

El ultimo término proviene de la ecuación de las armónicas hiperesféricas, base ortonormal en $L^2(S^{d-1})$, S^{d-1} es la esfera unidad en R^d.

$$D_{\theta_1,..,\theta_{n-2},\phi}Y + l(l+d-2)Y = 0, \quad Y \equiv Y(\theta_1,..,\theta_{n-2},\phi) \tag{8.25}$$

donde $(\theta_1,..\theta_{n-2},\phi)$ son las coordenadas esféricas sobre S^{d-1}.

Como antes, esta ecuación radial puede escribirse como una ecuación de Bessel haciendo la sistitución

$$R(\rho) = \rho^{-\frac{d-2}{2}}S(\rho) \tag{8.26}$$

lo que da,

$$S^{''} + \frac{1}{\rho} S^{'} + (1 - \frac{(l + (d-2)/2)^2}{\rho^2}) S = 0 \tag{8.27}$$

y entonces,

$$R(r) = (kr)^{-\frac{d-2}{2}} Z_{l+\frac{d-2}{2}}(kr) \tag{8.28}$$

Tenemos que distinguir dos casos, según la paridad de d, dimensión del espacio

(i) $d = 2\nu \; : R(r) = (kr)^{-(\nu-1)} Z_{l+\nu-1}(kr)$, **funciones de Bessel a índice entero**.

(ii) $d = (2\nu + 1) \; : R(r) = (kr)^{-(2\nu-1)/2} Z_{l+\frac{2\nu-1}{2}}(kr)$, **funciones de Bessel esféricas (a índice semi-entero)**.

Esta distincción entre espacio de dimensión par e impar es bastante fundamental. Lo encontramos en muchas situaciones: comportamiento de soluciones de la ecuación de ondas (clásica y cuántica), estructura del grupo de las rotaciones $(SO(2n), SO(2n+1))$, propiedades de los spinors,...

Resolvimos completamente la ecuación de Helmholtz en cada una de las 3 geometrías, cartesiana, cilíndrica y esférica. Las soluciones son obtenidas en términos de funciones elementales (exponenciales, trigonométricas, hiperbolicas) y de dos clases de funciones especiales: las armónicas esféricas y las funciones de Bessel.

Capitulo 9

Espacio de Hilbert

9.1 El problema de la aproximación

La teorìa de Fourier se trata del problema de la aproximación de una función $f(\phi)$ con la ayuda de un sistema de funciones trigonométricas, $w_n(\phi)$, $n \in Z$. Ahora vamos a estudiar el problema general de la aproximación de una función $f(x)$ con la ayuda de un sistema de funciones $u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$ con $x \in I \subseteq R$:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x) \tag{9.1}$$

Dos preguntas se hacen

(i) como medir la precisión de la aproximación, es decir la distancia entre f y la suma truncada $f_N = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n$?

(ii) que clase de funciones podemos aproximar así?

Claro estas dos preguntas no son independientes y la respuesta depende del problema sobre estudio.

Primero, vemos la primera duda y vamos a dar unos ejemplos de distancias comunmente usadas:

$$(1)\ d_0(f, f_N) \equiv sup_x |f(x) - f_N(x)| \tag{9.2}$$

$$(2)\ d_1(f, f_N) \equiv sup_x |f(x) - f_N(x)| + sup_x |f^{'}(x) - f_N^{'}(x)| \tag{9.3}$$

$$(3)\ d_\infty(f, f_N) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{sup_x |f^{(\nu)}(x) - f_N^{(\nu)}(x)|}{1 + sup_x |f^{(\nu)}(x) - f_N^{(\nu)}(x)|} \tag{9.4}$$

$$(4)\ d_{L^2}(f, f_N) \equiv \left[\int_I |f(x) - f_N(x)|^2 dx \right]^{1/2} \tag{9.5}$$

$$(5)\ d_{L^2_\rho}(f, f_N) \equiv \left[\int_I |f(x) - f_N(x)|^2 \rho(x)\ dx \right]^{1/2},\ \text{con } \rho(x) > 0 \tag{9.6}$$

Cada una de esas distancias corresponden a un problema muy bien definido. La distancia d_0 va a definir la convergencia uniforme de las funciones, d_1 es usada en cálculo de las variaciones, d_∞ va a jugar un papel importante en la teoría de las distribuciones, d_{L^2} y $d_{L^2_\rho}$ van a definir la diferencia cuadrática mediana y van a conducir a la noción de espacio de Hilbert, como lo vimos anteriormente. La función de peso $\rho(x)$, que da un peso diferente a diferentes partes del intérvalo considerado se encuentra en particular cuando queremos aproximar sobre un dominio infinito usando polinomios.

Para responder a la duda (ii), claro que cada distancia tiene sentido solamente por algunos tipos de funciones: así, d_∞ puede aplicarse solamente a funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ y d_{L^2} a funciones de cuadrado integrable. A cada distancia corresponde una clase natural de funciones. Por ejemplo, si nos limitamos al dominio $[-1,1]$, tenemos

(1) d_0: espacio $\mathcal{C}^0(-1,1)$ de las funciones continuas sobre $[-1,1]$.

(2) d_1: espacio $\mathcal{C}^1(-1,1)$ de las funciones una vez continuamente diferenciable sobre $[-1,1]$.

(3) d_∞ : espacio $\mathcal{C}^\infty(-1,1)$ de las funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre $[-1,1]$.

(4) d_{L^2}: espacio $L^2([-1,1],dx)$ de las funciones de cuadrado integrable

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx < \infty \tag{9.7}$$

(5) $d_{L^2_\rho}$: espacio $L^2([-1,1],\rho(x)\ dx)$ de las funciones de cuadrado integrable en relación a la función de peso $\rho(x)$

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \rho(x)\ dx < \infty \tag{9.8}$$

Podemos verificar facilmente que cada una de esas distancias satisfacen las 3 condiciones siguientes que dan una definición precisa de la noción de distancia sobre un espacio vectorial $\mathcal{E}$.

Llamamos ***distancia sobre un espacio vectorial*** $\mathcal{E}$ ***una función*** d***:*** $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\rightarrow R^+$ ***que satisface los condiciones siguientes:***

$$\begin{aligned}
(1m)\quad d(f,g) &\geq 0 \text{ y } d(f,g)=0 \Longleftrightarrow f=g && (9.9)\\
(2m)\quad d(f,g) &= d(g,f) && (9.10)\\
(3m)\quad d(f,g) &\leq d(f,h)+d(h,g)(\text{desigualdad del triángulo}) && (9.11)
\end{aligned}$$

Un espacio $\mathcal{E}$ con una tal distancia se llama ***espacio métrico***. Una distancia d sobre $\mathcal{E}$ permite determinar cuando dos elementos de $\mathcal{E}$ son vecinos. Para decirlo de manera diferente, la distancia defino sobre $\mathcal{E}$ una ***topología***. En particular, d va a definir sobre $\mathcal{E}$ una ***noción de convergencia***.

$$f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 t.q.\ \forall n > n_0,\ d(fn,f) < \epsilon \tag{9.12}$$

De la ***misma*** manera vamos a decir que $\{f_n\} \in \mathcal{E}$ es ***una seguida de Cauchy para la distancia*** d si tenemos

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \; t.q. \; \forall n \; m > n_0 \; d(f_n, f_m) < \epsilon \tag{9.13}$$

Y el espacio métrico $(\mathcal{E}, d)$ es dicho completo si todas seguidas de Cauchy es convergente:

$$\{f_n\} \text{ Cauchy} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{E} \; t.q. \; f_n \to f, \text{ es decir } d(f, f_n) \to 0 \text{ para } n \to \infty \tag{9.14}$$

Consideramos ahora la distancia de $f \in \mathcal{E}$ al elemento nulo. En el caso d_0, d_1, d_{L^2} y $d_{L^2_\rho}$ (pero no de d_∞), cuantidad $d(f, 0) \equiv ||f||$ verifica las condiciones de definición de una norma.

Llamamos norma sobre un espacio vectorial $\mathcal{E}$***, una función*** $||.|| : \mathcal{E} \to R^+$ ***que verifica las condiciones siguientes***:

$$\begin{aligned} (1n) \quad ||f|| &\geq 0 \text{ y } ||f|| = 0 \; ssi \; f = 0 & (9.15)\\ (2n) \quad ||cf|| &= |c| \; ||f||, \forall c \in C & (9.16)\\ (3n) \quad ||f + g|| &\leq ||f|| + ||g|| \text{ (desigualdad de Minkowski)} & (9.17) \end{aligned}$$

Podemos facilmente verificar que cada norma define una distancia por la relación

$$d(f, g) = ||f - g|| \tag{9.18}$$

pero el inverso NO es cierto: la distancia d_∞ no viene de una norma por que $d_\infty(f, 0)$ no verifica la condición de homogeneidad (2n).

Consecuencia de eso, es que una norma va a definir una topología sobre $\mathcal{E}$. Vamos a decir que $(\mathcal{E}, ||.||)$ ***es un espacio normado y si el espacio es completo, lo llamamos espacio de Banach***. El espacio $\mathcal{C}^\infty(-1, 1)$, con la distancia d_∞ es entonces un espacio métrico (en hecho, completo) pero no normado.

Entre las 4 normas correspondiente a d_0, d_1, d_{L^2} y $d_{L^2_\rho}$, los 2 últimos se distinguen por el hecho de provenir de un producto escalar.

Llamamos producto escalar sobre un espacio vectorial $\mathcal{E}$ ***una función*** $< .|. >: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to C$ ***que satisfacen las 3 condiciones***:

$$\begin{aligned} (1s) \quad < f|\alpha g + \beta h > &= \alpha < f|g > + \beta < f|h >, \forall \alpha, \beta \in C\\ (2s) \quad < f|g > &= \overline{< g|f >}\\ (3s) \quad < f|g > &\geq 0 \text{ y } < f|f >> 0 \text{ssi} f = 0 \end{aligned}$$

Entonces, ***el producto escalar es una forma hermitiana definida positiva sobre*** $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. De nuevo, un producto escalar defino una norma y entonces una topología por la relación

$$||f|| \equiv < f|f >^{1/2} \tag{9.19}$$

pero de nuevo, el inverso no es cierto: las normas correspondientes a d_0 y d_1 no derivan de un producto escalar; de la misma manera la norma L^p para $p \neq 2$, definido por

$$||f||_p \equiv \left[\int |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \tag{9.20}$$

($p = 1$ se usa en probabilidad) no deriva de un producto escalar.

Podemos probar que una norma deriva de un producto escalar si la norma verifica ***la idendidad del paralelogramo***:

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2) \tag{9.21}$$

Un espacio vectorial con un producto escalar se llama espacio prehilbertiano y si este espacio es completo, se llama espacio de Hilbert. En el caso de $L^2([-1,1], \rho(x)dx)$, el producto escalar es evidente

$$< f|g > \equiv \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x)\rho(x)dx \tag{9.22}$$

En resumen, tenemos el esquema siguiente,

$$\begin{array}{ccccc} \text{esp. prehilbert.} & \Rightarrow & \text{esp. normado} & \Rightarrow & \text{esp. métrico} \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{esp. Hilbert} & \Rightarrow & \text{esp. de Banach} & \Rightarrow & \text{esp. métrico completo} \end{array}$$

donde la segunda línea corresponde a los espacios completos.

La clase de los espacios de Hilbert es entonces la más restrictiva, pero es también la clase que juega un papel de lo más fundamental.

- del punto de vista matemática, es la clase la más sencilla de espacio funcional de dimensión infinita y con estructura muy rica.
- para el físico, el espacio de Hilbert se encuentra en el contexto matemático de las teorías cuanticas: es entonces para el físico, una herramienta escencial y de uso cotidiano si estudia la física cuantica. Pero, más generalmente el espacio de Hilbert es el contexto natural para la resolución de ecuaciones diferenciales en presencia de una norma cuadratica, llamamda energía.

9.2 Realización y propiedades elementales del espacio de Hilbert

Sea $\mathcal{E}$ un espacio prehilbertiano, con un producto escalar $< .|. >$.

Ejemplo:

(i) $\mathcal{C}^n$ con $< x|y >= \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j$, este espacio es también completo.

(ii) espacio $\mathcal{C}^0(a,b)$ con $< f|g >= \int_a^b \overline{f(x)} g(x)dx$. Este espacio no es completo.

De la definición del producto escalar se deriva 3 desigualdades fundamentales:

(1) ***desigualdad de Schwartz(-Cauchy-Bunjakowski)***:

$$| < f|g > | \leq ||f||.||g||, \quad ||f|| \equiv < f|f >^{1/2}; \tag{9.23}$$

con igualdad ssi[1] $f = \lambda g$, $\lambda \in \mathcal{C}$

(2) ***desigualdad de Minkowski***:

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g|| \tag{9.24}$$

(3) ***desigualdad del triángulo***:

$$||f - g|| \leq ||f - h|| + ||h - g|| \tag{9.25}$$

Así, un espacio prehilbertiano $\mathcal{E}$ puede naturalmente ser dotado de la topología asociada a esta distancia. Esta topología vamos a llamarla ***topología fuerte o topología de la norma***. Vamos a hablar de ***convergencia fuerte*** de una seguida si:

$$f_n \to f \Leftrightarrow d(f_n, f) \equiv ||f_n - f|| \to 0 \tag{9.26}$$

En la topología fuerte, el producto escalar es una forma sesquilineal continua en virtud de la desigualdad de Schwartz:

$$f_n \to 0 \Rightarrow < g|f_n > \to 0 \ \forall g \in \mathcal{E} \tag{9.27}$$

En este curso, vamos a interesarnos a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es decir un espacio prehilbertiano completo o, para decirlo de otra manera, un espacio en cual cualquier seguida de Cauchy converge verso un elemento del mismo espacio.

$$\lim_{N,M\to\infty} ||f_N - f_M|| = 0 \Rightarrow \exists f = \lim_{N\to\infty} f_N, \ f \in \mathcal{H} \tag{9.28}$$

Es en hecho su caracter completo que da toda su importancia al espacio de Hilbert en las aplicaciones.

Vamos a decir que esta espacio es de

- dimensión finita N si existe N vectores linealmente independiente pero NO $N + 1$.

  ejemplo: C^N.

- dimensión infinita si $\forall N$, $\exists N$ vectores linealmente independiente

  ejemplo: $L^2([a, b], dx)$

Entre los realizaciones concretas del espacio de Hilbert, vamos a dar 3 ejemplos que son muy importante en los aplicaciones:

[1] ssi=si y solamente si

(1) espacio l^2 de las seguidas de cuadrado integrable.

$$l^2 = \{c = (c_n)_1^\infty, c_n \in C \ t.q. \ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty\} \tag{9.29}$$

(2) espacio $L^2(D)$ de las funciones de cuadrado integrable sobre $D \subset R$

$$L^2(D) = \{f : D \to C, \ \in_D |f(x)|^2 dx < \infty\} \tag{9.30}$$

con el producto escalar

$$< f|g >= \int_D \overline{f}(x) \ g(x) \ dx \tag{9.31}$$

Cuanto a su caracter completo, tenemos que decir:

- si usamos la integral de Riemann, el espacio no es completo.
- con el integral de Lebesgue, el espacio es completo (es el contenido del teorema de Riesz-Fischer). Pero en este caso, un elemento de $L^2(D)$ no es una función pero es una clase de equivalencia $f \approx g$ si $f(x) = g(x)$ excepto sobre un conjunto de medida nula. Entonces, la valor en un punto x de un elemento f de $L^2(D)$ no es en general definido.

(3) el espacio de Bargmann $\mathcal{H}$ de funciones enteras

$$\mathcal{H} = \{f : C \to C, f \text{ holomorfica en todo el plano complejo y} \tag{9.32}$$

$$\left. \int_C |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz < \infty \ (dz \equiv dxdy) \right\}$$

con el producto escalar

$$< f|g >= \int_C \overline{f}(z) g(z) e^{-|z|^2} dz \tag{9.33}$$

Este espacio es usado en diferentes problemas de mecánica cuántica (representaciones de las relaciones de comutaciones canonicas, estados coherentes, óptica cuántica, lasers,...)

9.3 Sobre-espacios Hilbertianos

(1) Sea H un espacio de Hilbert, K una parte de H. Decimos que K es ***cerrada*** si K contiene todos sus puntos de acumulación , es decir que

$$\text{si } f_n \to f \text{ y } f_n \in K \Rightarrow f \in K \tag{9.34}$$

(2) ***la cerradura (o adherencia) de*** K***, notada*** $\overline{K}$ es la más pequeña parte cerrada de H conteniendo K. La obtenemos juntando a los elementos de K los límites de los seguidas convergentes contenidas en K.

(3) una parte K de H es ***densa*** si $\overline{K} = H$.

(4) Llamamos sub-espacio hilbertiano, un sub-espacio cerrado de H. Como H es completo, todo sub-espacio cerrado de H es también completo, y entonces son ellos mismos un espacio de Hilbert.

(5) Sea K una parte de H, llamamos

- ***sub-espacio vectorial engendrado por*** K, el conjunto de combinación lineal finita de elementos de K

$$< K >\equiv spanK = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j, f_j \in K \ , \alpha_j \in C\} \tag{9.35}$$

- ***sub-espacio hilbertiano engendrado por*** K, el conjunto $[K] \equiv< \overline{K} >$, es decir lo más pequeño sub-espacio hilbertiano conteniendo K.

(6) la parte K es dicha ***total o base (hilbertiana) de*** H si $[K] = H$.

(7) El producto escalar define una relación de ortogonalidad

$$f \perp \Leftrightarrow < f|g >= 0 \tag{9.36}$$

(8) Sea $K \subset H$, el ortogonal de K es el conjunto $K^{\perp}$ tal que

$$K^{\perp} = \{g \in H, < g|f >= 0 \ \forall f \in K\} \tag{9.37}$$

Proposición 1: Sea H un espacio de Hilbert, K una parte de H, entonces tenemos

(i) $K^{\perp}$ es un sub-espacio hilbertiano de H

(ii) $K \subseteq K^{\perp\perp}$ donde $K^{\perp\perp} \equiv (K^{\perp})^{\perp}$ y $K^{\perp\perp\perp} = K^{\perp}$

(iii) $K^{\perp\perp} = [K]$, es decir $K = K^{\perp\perp}$ ssi K es un sub-espacio hilbertiano.

Prova:

1 $K^{\perp}$ es evidentemente un subespacio vectorial y es cerrado en virtud de la continuidad del producto escalar (desigualdad de Schwarz).

Si $f_n \in K^{\perp}$ y $f_n \to f$, entonces, $f \in K^{\perp}$ por que $\forall g \in K$, tenemos

$$< f|g >=< f - f_n|g > + < f_n|g >=< f - f_n|g > \tag{9.38}$$

por que $f_n \in K^{\perp}$

$$\Rightarrow | < f|g > | \leq ||f - f_n||.||g|| \to 0 \tag{9.39}$$

2 Si $f \in K$, $f \perp g$ $\forall g \in K^{\perp}$, es decir $f \in K^{\perp\perp}$, tenemos entonces $K \subseteq K^{\perp\perp}$ y $K^{\perp} \supseteq K^{\perp\perp\perp}$, pero también $K^{\perp} \subseteq (K^{\perp})^{\perp\perp}$ y entonces $K^{\perp} = K^{\perp\perp\perp}$

3 Como $[K]$ es lo más pequeño sub-espacio hilbertiano conteniendo K, tenemos que $[K] \subseteq K^{\perp\perp}$. Por (i), $[K]^{\perp} = K^{\perp}$. La igualdad se deriva del teorema siguiente:

Teorema 2: ***Teorema de la descomposición ortogonal***
Sea un H un hilbertiano y F un subespacio hilbertiano. Entonces, H puede decomponerse en suma directa:

$$H = F \otimes F^{\perp} \tag{9.40}$$

es decir que $\forall f \in H$m, f tiene una decomposición única tal que $f = f_F + f_{F^{\perp}}$ con $f_F \in F$ y $f_{F^{\perp}} \in F^{\perp}$ y $< f_F | f_{F^{\perp}} >= 0$.

Este teorema generaliza la situación conocida en dimensión finita. La demostración de este teoremo se basa en el uso de una base hilbertiana. Este teorema es fundamental por que caracteriza el espacio de Hilbert: un espacio de Banach de cual todo sub-espacio cerrado tiene un suplementario cerrado es necesariamente un espacio de Hilbert (conjectura de Grothendieck en 1955, provado por Lindenstrauss y Tzafriri en 1971).

Notamos que si K es un cualquier sub-espacio vecotrial de H, tenemos siempre

$$H = [K] \otimes K^{\perp} = K^{\perp\perp} \otimes K^{\perp} \tag{9.41}$$

9.4 Bases ortonormales

Una familia de vectores $\{f_n\} \in H$ es dicha ***ortonormale*** si

$$< f_n | f_m >= \delta_{nm} \tag{9.42}$$

Un espacio de Hilbert es dicho ***separable*** si contiene un conjunto enumerable $\{h_\nu\}$ denso.

Teorema 4.1: *Sea H un espacio de Hilbert separable. Entonces, todo sub-espacio de Hilbert F de H (y entonces H mismo) tiene una base ortonormal enumerable.*

Prova: F es separable como H, eso significa que existe una seguida $\{f_n\} \in F$ densa en F, es decir una base enumerable de F: $[\{f_n\}] = F$. Nos queda a construir una base ortonormal a partir de $\{f_n\}$, lo que se hace usando ***el proceso de Gram-Schmidt***:

- $$h_1 = f_1 \text{ y } e_1 = \frac{h_1}{||h_1||} \tag{9.43}$$
- $$h_2 = f_2 - < e_1 | f_2 > e_1 \text{ y } e_2 = \frac{h_2}{||h_2||} \tag{9.44}$$
- $$h_3 = f_3 - < e_1 || f_3 > e_1 - < e_2 | f_3 > e_2 \text{ y } e_3 = \frac{h_3}{||h_3||} \tag{9.45}$$
- $$.... \tag{9.46}$$

$$(h_N) \equiv \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ . \\ h_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ * & 1 & 0 & . & . & . \\ * & * & 1 & 0 & . & . \\ * & * & * & 1 & 0 & . \\ * & * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_N \end{pmatrix} \equiv M(f_N)$$

Podemos notar que la matriz M que transforma los vectores $\{f_N\}$ en los vectores $\{h_N\}$ es una matriz infinita, triangular inferior con uno sobre la diagonal. Entonces, M es inversible, de determinante igual a 1 y M^{-1} es tambien triangular inferior . Eso va a garantizar la unicidad de la transformación $(f_n) = M^{-1}(h_n)$.

Las propiedades de las bases ortonormales son resumida en el teorema siguiente:

Teorema 4.2:

(i) *todos las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tiene el mismo numero de elementos, llamada la dimensión del espacio.*

(ii) *dos espacios de Hilbert H_1, H_2 de misma dimensión son isomorficos, es decir que existe una bijección: $U : H_1 \to H_2$ tal que*

$$< Uf|Ug >_{H_2} = < f|g >_{H_1} \tag{9.47}$$

Un tal bijección se llama ***operador unitaria*** y los dos espacios son dichos unitariamente equivalente.

(iii) *un espacio de Hilbert es separable ssi tiene una base ortonormal numerable.*

(iv) *todo espacio de Hilbert H separable es unitariamente equivalente sea a C^N si $dimH = N$, $N < \infty$, sea a l^2 si $dimH = \infty$. La equivalencia unitaria es dada con la ayuda de cualquier base ortonormal $\{e_n\}$:*

$$f \in H \Rightarrow f = \sum_n c_n e_n \leftrightarrow (c_n) \in l^2 \text{ o } C^N \tag{9.48}$$

Ejemplo de espacio separable:

- l^2 con base $\{e_n\}$, $e_j = (0, ..., 0, 1(j^o \text{ coordenada}), 0, ...)$
- $L^2(R)$
- espacio de Bargmann H con la base $\{z^n, n = 0, 1, 2, ...\}$

Ahora necesitamos un criterio para determinar si un sistema ortonormal de vectores es una base.

Sea $\{e_n\}$ un sistema ortonormal de vectores de H. Si notamos $c_n \equiv < e_n|f >$, los coeficientes de Fourier de $f \in H$ en este sistema e_n, tenemos, exactamente como en el caso de la serie de Fourier, la desigualdad de Bessel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq ||f||^2 \tag{9.49}$$

Decimos que f verifica la igualdad de Parseval si tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = ||f||^2 \tag{9.50}$$

***Teorema 4.23*:*Teorema de las bases ortonormales*.** *Sea $\{e_n\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H. Entonces, los tres condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $\{e_n\}$ *es una base hilbertiana de H.*

(ii) *todo $f \in H$ verifica la igualdad de Parseval en relación a $\{e_n\}$.*

(iii) $< e_n|f >= 0 \ \forall n \Rightarrow f = 0$

En este caso, todo $f \in H$ es representada por una serie convergente en norma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty \text{ o } N} c_n e_n \tag{9.51}$$

El interés de este teorema es que en general es más comodo, en práctica, de verificar la condición (iii) que la definición (i) para verificar que un sistema ortonormal dado es una base.

Vamos a establecer, por este método, que todos los sistemas de polinomios ortogonales que vamos a construir en las próximos capítulos son bases en los espacios de Hilbert respectivos.

Capitulo 10

Polinomios ortogonales sobre un intérvalo finito: polinomios de Legendre

10.1 Polinomios ortogonales sobre un intérvalo finito

En este capítulo vamos a considerar el caso de un intérvalo finito (en los capítulos siguientes pasamos al caso de un intérvalo infinito o semi-infinito. Vamos a tratar de aproximar un función por polinomios al ejemplo de las series de Fourier. Vamos a seguir usando la diferencia cuadrática mediana $\Delta_N(f) \equiv \int_a^b |f - f_N|^2 dx$ para medir la diferencia entre la función y su aproximación.

Vamos a considerar el espacio de Hilbert $H = L^2([a,b], dx)$. El problema es entonces construir una base ortonormal de H, constituada de polinomios $P_n(x)$, de grado n, lo que implica que todas funciones $f \in H$ puede desarrollarse en una serie convergente (al sentido de L^2):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \tag{10.1}$$

Teorema 1:

las potencias $\{x^n, n = 0, 1, 2, ...\}$ forman un conjunto TOTAL de $L^2([a,b], dx)$ para cualquier intérvalo finito $[a,b]$.

Prova:
Sea f una función ortogonal a todos los x^n y entonces a todos los polinomios. Vamos a probar que $f(x) = 0$ y vamos a usar un razonamiento por el absurdo.

(1) suponemos primero que f continua sobre $[a, b]$. Sea $f(x_0) = \eta > 0$. Como la función es continua, existe un intérvalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sobre cual $f(x) \geq \frac{\eta}{2}$.

Consideramos la parábola: $p(x) = 1 - \frac{(x-x_0)^2 - \delta^2}{(b-a)}$.

$$p(x) > 0 \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \tag{10.2}$$
$$p(x) = 1 \quad \text{para} \quad x = x_0 \pm \delta \tag{10.3}$$
$$p(x) > 1 \quad \text{para} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \tag{10.4}$$

$\forall n \in N$, $p^n(x)$ es un polinomio y entonces

$$\int_a^b p^n(x) f(x) dx = 0 \tag{10.5}$$

Podemos decomponer la integral como:

$$0 = \int_a^b = \int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^b \tag{10.6}$$

Entonces tenemos,

$$\begin{aligned}
|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p^n f\ dx| &\leq |\int_a^{x_0-\delta} p^n f\ dx| + |\int_{x_0+\delta}^{b} p^n f\ dx| \\
&\leq |\int_a^{x_0-\delta} f\ dx| + |\int_{x_0+\delta}^{b} f\ dx| \text{ (porque } |p^n| < 1) \\
&\leq (\int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{b})|f|dx \\
&\leq \int_a^b |f|dx \equiv c \qquad (10.7)
\end{aligned}$$

De otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p^n f\ dx &\geq \frac{\eta}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p^n dx \\
&\geq \frac{\eta}{2}\int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} p^n dx \\
&\geq \frac{\eta}{2}\mu^n\delta \qquad (10.8)
\end{aligned}$$

donde $\mu = min\{p(x), x_0 - \delta/2 \leq x \leq x_0 + \delta/2\} > 1$. Entonces, tenemos

$$\frac{\eta}{2}\mu^n\delta \leq |\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p^n f\ dx| < c \qquad (10.9)$$

lo que es imposible por que el miembro de izquierda deviene arbitrariamente grande para n suficientamente grande. Entonces, tenemos que tener $f(x) = 0$.

(2) Sea f una función de cuadrado integrable arbitraria. Entonces,

$$F(x) \equiv \int_a^x f(y)\ dy \qquad (10.10)$$

donde el integral es tomada en el sentido de Lebesgue.$F(x)$ es una función continua y $F(a) = 0$. También, tenemos que $F(b) = 0$ por que

$$F(b) = \int_a^b 1.f(y)\ dy = 0 \qquad (10.11)$$

Tal función es diferenciable y $\frac{dF}{dx} = f(x)$ en todos los puntos x (excepto sobre un conjunto de medida nula o para decirlo de otra manera, sobre un conjunto de punto numerable)[1]

[1] eso es debido al hecho que L^2 es completo solamente si usamos la integral en el sentido de Lebesgue. Así los elementos de L^2 no son funciones pero son clase de equivalencia de funciones y decimos que dos funciones son equivalentes si son igual en todos los puntos excepto sobre un conjunto numerable de puntos o para decirlo de otra manera, sobre un conjunto de medida nula.

Entonces, para cualquier polinomio $P(x)$, tenemos

$$0 = \int_a^b P(x)f(x)dx = [P(x)F(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\frac{dP}{dx}dx \qquad (10.12)$$

Como $\frac{dP}{dx}$ es todavía un polinomio, la función F es contínua y entonces ortogonal a todos los polinomios. Entonces, usando el resultado anterior (de (1)), $F(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$(excepto sobre un conjunto numerable de puntos), es decir que $f(x)$ es el vector nulo de $L^2([a,b], dx)$.

10.2 Construcción de los polinomos de Legendre

Vamos a empezar por el caso más sencillo, el caso del intérvalo $[-1, 1]$. Usando el metodo de Gram-Schmidt vamos a construir l**os polinomios de Legendre**.

Proposición 2.1: *Las condiciones de ortogonalidad*

$$< P_n|P_m > \equiv \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad m \neq n \qquad (10.13)$$

y de normalización

$$P_n(1) = 1, \ \forall n \in N \qquad (10.14)$$

determinar uno y un solo sistema de polinomios $P_n(x)$, de grado n llamada los polinomios de Legendre.

La condición de normalización es escogida por razones historicas.

Prova: para demostrar este resultado construimos los polinomios $P_n(x)$ usando el método de Gram-Schmidt:

- $n = 0 \Rightarrow P_0(x) = 1$
- $n = 1 \Rightarrow P_1(x) = a_0 x + a_1$. Usando (10.13), tenemos $a_1 = 0$ y de (10.14), $a_0 = 1 \Rightarrow P_1(x) = x$
- $n = 2 \Rightarrow P_2(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$. Las condiciones de ortogonalidad dan $b_1 = 0$ y $\frac{2}{3}b_0 + 2b_2 = 0$; por la normalización tenemos finalmente $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$
- ....

La unicidad de la solución puede demostrarse directamente en virtud de la unicidad del proceso de Gram-Schmidt. A notar que la unicidad permite de inversar la construcción y de expresar los x^j en función de los $P_n(x)$.

Los polinomios P_n son de paridad bien determinada, alternativamente par e impar:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{10.15}$$

Esta propiedad se verifica usando la unicidad: $P_n(-x)$ es un polinomio de grado n, ortogonal a todos los polinomios de grados inferior y entonces $P_n(-x) = \lambda_n P_n(x)$. Pero, también, tenemos

$$\int_{-1}^{1} (P_n(-x))^2 dx = \int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2 dx = \lambda_n^2 \int_{-1}^{1} |P_n(x)|^2 dx$$

es decir que $\lambda_n^2 = 1 \Rightarrow \lambda_n = \pm 1$.

El polinomio P_n tiene entonces una paridad bien definidad y necesariamente $\lambda_n = (-1)^n$ como P_n es de grado n.

Por construcción, los polinomios de Legendre se obtienen a partir de las potencias x^n usando el proceso de Gram-Schmidt. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} < x^n, n = 0, 1, 2, .., N > &= < P_n, n = 0, 1, .., N > \\ f \perp x^n, n = 0, 1, ... &\Leftrightarrow f \perp P_n, n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Esto probo el resultado siguiente:

Teorema 2.2: *El sistema de polinomios de Legendre* $\{P_n(x), n = 0, 1, ...\}$ *es una base ortogonal en el espacio de Hilbert* $L^2([-1, 1], dx)$.

Los polinomios de Legendre son muy útiles en la práctica experimental. En mecánica cuántica, por ejemplo, en un proceso de difusión de una partícula por un potencial central (coulombiano por ejemplo), la distribución angular de las partículas saliendo es una función de $\cos\theta$, done θ es el ángulo de difusión. Entonces, el experimentador va a aproximar esta cuandidad medida por sus primeros términos de su serie en polinomios de Legendre:

$$f(\theta) \approx \sum_{n=0}^{k} c_n P_n(\cos\theta), \quad \cos\theta \in [-1, 1] \tag{10.16}$$

Antes de pasar a un estudio más detallado de los polinomios de Legendre, podemos notar que el razonamiento usado en la demonstración del teorema 1 puede aplicarse sin problema al caso de $L^2([a, b], \rho(x)dx)$ con una función de peso $\rho(x) > 0$. Obtenemos así otros tipos de polinomios sobre $[-1, 1]$ correspondiente a la elección de $\rho(x) = (1 - x)^\beta (1 + x)^\alpha$.

α, β	$\rho(x)$	tipo de polinomios
arbitrarios > -1	$(1 - x)^\beta (1 + x)^\alpha$	Pol. de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
$\alpha = \beta > -1$	$(1 - x^2)^\alpha$	Pol. de Gegenbauer $C_n^{(\alpha+1/2)}(x)$
$\alpha = \beta = \pm 1/2$	$(1 - x^2)^{\pm 1/2}$	Pol. de Tchebychev $T_n(x)$
$\alpha = \beta = 0$	1	Pol. de Legendre $P_n(x)$

Teorema 2.3: *El sistema de polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x), n = 0, 1, ..$ es una base ortogonal en $L^2)([-1,1], \rho^{(\alpha,\beta)}(x)dx$ donde $\rho^{(\alpha,\beta)}(x) \equiv (1-x)^\beta(1+x)^\alpha$. En particular, los sistemas de polinomios de Gegenbauer ($\alpha = \beta$) , de Tchebychev ($\alpha = \beta = 1/2$) y de Legendre ($\alpha = \beta = 0$) son base ortogonal en el espacio de Hilbert correspondiente.*

Este resultado puede todavía reformularse nuevamente. En efecto, los dos enunciados siguientes son equivalentes:

(i) el sistema de polinomios $p_n(x), n = 0, 1, ...$ es una base ortonormal en $L^2([a,b], \rho(x)dx)$

(ii) el sistema de función $f_n(x) = p_n(x)\rho^{1/2}(x), n = 0, 1, ...$ es una base ortonormal de $L^2([a,b], dx)$.

10.3 La fórmula de Rodrigues

No es muy práctico de tener que calcular los polinomios de Legendre de cerca en cerca: una fórmula compacta dando directamente $P_n(x)$ es necesaria. La fórmula nos fue dada por O. Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n \tag{10.17}$$

La función definida por (10.17) es un polinomio de grado n. En virtud de la unicidad de los polinomios de Legendre, este polinomio va a ser exactamente el polinomio de Legendre correspondiente si probamos que la expresión (10.17) verifica las relaciones (10.13) y (10.14).

Por eso, vamos a usar la fórmula de Liebniz para la derivación de un producto:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (u(x)v(x)) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{d^j u(x)}{dx^j}\frac{d^{n-j}v(x)}{dx^{n-j}} \tag{10.18}$$

donde $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$.

Usando la notación $d_x \equiv \frac{d}{dx}$, tenemos

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} d_x^n \left[(x+1)^n(x-1)^n\right] \tag{10.19}$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{n} C_n^j d_x^j (x+1)^n d_x^{n-j}(x-1)^n \tag{10.20}$$

Para $x = 1$, el único término no cero es el término con $j = 0$, entonces tenemos,

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} C_n^0 2^n n! = 1 \tag{10.21}$$

Para la relación de ortogonalidad, tenemos que integrar por parte unas veces:

$$< P_n|P_m >= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1} d_x^n(x^2-1)^n d_x^m(x^2-1)^m dx \tag{10.22}$$

Suponemos que $m < n$, tenemos integrando por parte,

$$\begin{aligned} < P_n|P_m > &= \frac{1}{2^{n+m}n!m!}\left\{d_x^m(x^2-1)^m d_x^{n-1}(x^2-1)^n \,|_{-1}^{1}\right. \\ &\left. - \int_{-1}^{1} d_x^{m+1}(x^2-1)^m d_x^{n-1}(x^2-1)^n dx\right\} \end{aligned} \tag{10.23}$$

El primer término es igual a cero y podemos iterar el proceso m veces, obtenemos

$$< P_n|P_m >= \frac{(-1)^m(2m)!}{2^{n+m}n!m!}\int_{-1}^{1} d_x^{n-m}(x^2-1)^n dx \tag{10.24}$$

por que $d_x^{2m}(x^2-1)^m = (2m)!$.

Para $m < n$, el resultado es nulo por que $d_x^{n-m-1}(x^2-1)^n|_{-1}^{1} = 0$,lo que demuestra la ortogonalidad.

Para $m = n$, obtenemos la norma de P_n,

$$< P_n|P_m >= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \tag{10.25}$$

Calculamos esta integral por substitución $x = \sin\theta$.

$$\begin{aligned} < P_n|P_m > &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta^{2n+1} d\theta \\ &= \frac{2}{2n+1} \end{aligned} \tag{10.26}$$

donde usamos el resultado de la integral en θ [2] Tenemos finalmente,

$$< P_n|P_m >= \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \tag{10.27}$$

10.4 La ecuación diferencial de Legendre

Los polinomios de Legendre verifican una ecuación diferencial de segundo grado que se deriva fácilmente de la fórmula de Rodrigues. Sea $r(x) \equiv (x^2-1)^l$,

$$d_x r = 2lx(x^2-1)^{l-1} = \frac{2lx}{(x^2-1)}r(x) \tag{10.28}$$

o escrito de manera diferente,

$$(1-x^2)d_x r(x) + 2lxr(x) = 0 \tag{10.29}$$

[2] esta integral puede encontrarse en cualquier libro de tablas de integrales y funciones especiales.

Derivamos esta relación $(l+1)$ veces usando la fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned} d_x^{l+1}\left[(1-x^2)d_x r + 2lxr\right] &= \sum_{j=0}^{l+1} C_{l+1}^j \left[d_x^j (1-x^2) d_x^{l+2-j} r \right. \\ &\quad \left. + 2l d_x^j x d_x^{l+1-j} r\right] = 0 \end{aligned} \tag{10.30}$$

Solo los 3 primeros términos son no-cero por culpa del primer factor en cada término, así obtenemos

- $j = 0$

$$(1-x^2)d_x^{l+2} r + 2lx d_x^{l+1} r \equiv \left[(1-x^2)d_x^2 + 2lx d_x\right] d_x^l \tag{10.31}$$

- $j = 1$

$$(1+l)(-2x d_x^{l+1} r + 2l d_x^l r) \equiv \left[-2(l+1)x d_x + 2l(l+1)\right] d_x^l r \tag{10.32}$$

- $j = 2$

$$\frac{l(l+1)}{2}(-2) d_x^l r \equiv \left[-l(l+1)\right] d_x^l r \tag{10.33}$$

Adicionando estas tres contribuciones, obtenemos finalmente

$$\left[(1-x^2)d_x^2 - 2x d_x + l(l+1)\right] d_x^l r = 0 \tag{10.34}$$

Y usando la fórmula de Rodrigues, $d_x^l r = 2^l l! P_l(x)$, obtenemos

$$\left[(1-x^2)d_x^2 - 2x d_x + l(l+1)\right] P_l(x) = 0 \tag{10.35}$$

Para decirlo de manera diferente, los polinomios de Legendre verifican la ecuación siguiente, llamada ***ecuación de Legendre***:

$$(1-x^2)y^{''} - 2xy^{'} + l(l+1)y = 0 \tag{10.36}$$

que podemos escribir sobre las formas siguientes:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0 \tag{10.37}$$

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] y = l(l+1)y \tag{10.38}$$

Esta última ecuación es una ecuación a valores propios de la forma

$$L(\frac{d}{dx})y = cy \text{ con } c = \text{ valores propios} \tag{10.39}$$

Rem.: una ecuación de la forma (10.37) o más generalmente de la forma

$$\frac{d}{dx}(f(x)\frac{dy}{dx}) + g(x)y = 0 \tag{10.40}$$

es llamada formalmente autoadjunta o de Sturm-Liouville.

En la derivada de (10.35) el grado de P_l es un entero positivo. Pero, la ecuación (10.35) tiene sentido para cualquier valor de l complejo. Por la teoría general de las ecuaciones diferenciales, sabemos que para cualquier $l \in C$, la ecuación (10.35) tiene dos soluciones linealmente independientes. De todas esas soluciones, las únicas que sean de cuadrado integrable y regular sobre todo el intérvalo $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre y hay uno solo para cada valor de $l = 0, 1, 2, ...$ Más precisamente, tenemos:

(i) $l \in N$,

- una solución L^2 y regular, el polinomio $P_l(x)$.
- una solución L^2 pero irregular en $x = \pm 1$, notada $Q_l(x)$ y llamada función de Legendre de 2nd specie que se escribe:

$$Q_l(x) = \frac{1}{\pi}\left\{P_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - f_l(x)\right\} \tag{10.41}$$

donde $f_l(x)$ es un polinomio de grado $(l-1)$. Por ejemplo, tenemos,

$$Q_0(x) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{10.42}$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{\pi}\left\{x\ln\frac{1+x}{1-x} - 2\right\} \tag{10.43}$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{\pi}\left\{P_2(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - 3x\right\} \tag{10.44}$$

La relación (10.41) muestra explícitamente que $Q_l(x)$ es una función transcendental que diverge logarítmicamente para $x \to \pm 1$. Además, $Q_l(x) \in L^2(-1, 1)$, pero sus derivadas no son de cuadrado integrable. Tenemos también la fórmula remarcable:

$$Q_l(x) = \frac{1}{\pi}(P)\int_{-1}^{1}\frac{P_l(y)}{y-x}dy \tag{10.45}$$

donde $(P)\int$ designo el valor principal de la integral. Estas funciones Q_l tiene un papel importante en astronomía.

(ii) l no pertenece a N: dos soluciones linealmente independientes y transcendentes, las funciones de Legendre generalizadas (ninguna es regular o de cuadrado integrable).

10.5 La función de generación

Muchas veces es más comodo de poder tratar todos los polinomios P_n en una vez. Un método posible es de usar la función de generación o función generadora. Una función generadora es una función a dos variables $f(x,t)$ analítica (real) en t, y tal que su serie de Taylor en t tiene por coeficientes los polinomios buscados:

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \tag{10.46}$$

para $|x| \leq 1$ y $|t| < 1$.

La función generadora de los polinomios de Legendre esta íntimamente ligada al potencial newtoniano o coulombiano. Para mostrar eso, consideramos una carga (de carga eléctrica 1) situada al punto $(0,0,a)$ en coordenadas cartesianas y calculamos el potencial electrostático en un punto cualquiera P de coordenadas polares (r,θ,ϕ). Primero, suponemos que $r > a$, sea la relación siguiente:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{a} \tag{10.47}$$

con

$$R^2 = ||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a}||^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta \tag{10.48}$$

Este potencial vale

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta\right]^{1/2}} \tag{10.49}$$

$$= \frac{1}{r(1+t^2-2xt)^{1/2}} \tag{10.50}$$

donde $t = a/r$ y $t < 1$, $x = \cos\theta$ y entonces $|x| \leq 1$.

Vamos a probar que la función generadora de los polinomios de Legendre es la función:

$$f(x,t) \equiv \frac{r}{R} = \frac{1}{(1+t^2-2xt)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \tag{10.51}$$

Primero, vamos a verificar que los $P_n(x)$ obedecen a las relaciones de ortogonalidad y de normalización (10.13) y (10.14). Por eso vamos a calcular

$$\int_{-1}^{1} f(x,t) f(x,u) dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+t^2-2tx)^{1/2}(1+u^2-2ux)^{1/2}} \tag{10.52}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ut}} \ln \frac{1+\sqrt{ut}}{1-\sqrt{ut}} \tag{10.53}$$

Usando la serie,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{10.54}$$

para $|x| < 1$, obtenemos

$$\int_{-1}^{1} f(x,t)f(x,u)dx = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx\right) t^m u^n \quad (10.55)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^m u^n \quad (10.56)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\delta_{mn}\frac{2}{2n+1}\right) t^m u^n \quad (10.57)$$

Podemos hacer un cálculo similar en la región $r < a$, usando la serie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{a}\right)\cos\theta)^{1/2}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^n \quad (10.58)$$

El análisis que hicimos es fundamental para los aplicaciones (electrostática o gravitación) por que es la base de las series multipolares.

10.6 Relación de recurrencia

Usando la función generadora obtenemos fácilmente las relaciones de recurrencia entre los $P_n(x)$. En virtud de la analicidad, podemos derivar en la variable t los dos miembros de la relación siguiente:

$$f(x,t) = (1+t^2-2xt)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (10.59)$$

Así, obtenemos,

$$\frac{d}{dt}f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n n t^{n-1} = \frac{-1}{2}(1+t^2-2xt)^{-3/2}(2t-2x)$$

$$= \frac{x-t}{(1+t^2-2xt)} f(x,t)$$

$$(1+t^2-2xt)\sum_{n=1}^{\infty} P_n n t^{n-1} = (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)(nt^{n-1} + nt^{n+1} - 2xnt^n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(xt^n - t^{n-1}) \quad (10.60)$$

$$\Rightarrow P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)P_{n+1}(x) + (n-1)P_{n-1}(x) - 2xnP_n(x)\right]t^n$$

$$= xP_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[xP_n(x) - P_{n-1}(x)\right]t^n \quad (10.61)$$

Igualizando los coeficientes de t^n en los dos miembros, obtenemos los relaciones de recurrencia a 3 términos:

$$n = 0 \quad : \quad P_1 - xP_0 = 0 \tag{10.62}$$

$$n \geq 1 \quad : \quad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \tag{10.63}$$

De la misma manera, derivando la ecuación definiciando la función generadora en la variable x tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)t^n = \frac{-1}{2}(1+t^2-2xt)^{-3/2}(-2t) \tag{10.64}$$

$$= \frac{t}{1+t^2-2xt} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{10.65}$$

Procesando de la misma manera, obtenemos

$$P_{n+1}^{'} + P_{n-1}^{'} - 2xP_n^{'} - P_n = 0 \tag{10.66}$$

Combinando las tres ecuaciones de recurrencia que tenemos, podemos obtener mucho más relaciones de recurrencia. Por ejemplo, podemos obtener,

$$P_{n+1}^{'} - P_{n-1}^{'} - (2n+1)P_n = 0 \tag{10.67}$$

O todavía,

$$P_{n+1}^{'} - xP_n^{'} - (n+1)P_n = 0 \tag{10.68}$$

$$P_{n-1}^{'} - xP_n^{'} + nP_n = 0 \tag{10.69}$$

De la misma manera, podemos usar esas relaciones para obtener la ecuación diferencial de Legendre:

$$(1-x^2)P_n^{''} - 2xP_n^{'} + n(n+1)P_n = 0 \tag{10.70}$$

Capitulo 11

Polinomios ortogonales sobre R: polinomios d'Hermite

11.1 Funciones y polinomios de Hermite

Vamos a pasar a R y claro que sobre R o R^+, no podemos construir una familia de polinomios ortogonales sin tomar una función de peso en la integral. La gaussiana e^{-x^2} es la más sencilla. Para llegar a nuestro fin, vamos a partir de una ecuación diferencial. Más precisamente, vamos a buscar las soluciones de cuadrado integrable, es decir las soluciones que pertenecen a $L^2(R, \rho(x)dx)$ de la ecuación a valores propios:

$$Hf \equiv \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2}f + x^2 f\right) = Ef \tag{11.1}$$

Vamos a proceder de manera pura algebraíca usando sistemáticamente las anotaciones del espacio de Hilbert:

$$< f|g > \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f(x)}\ g(x)\ dx \tag{11.2}$$

$$||f||^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \tag{11.3}$$

En hecho, vamos siempre a tomar funciones f y g suficientemente regular, por ejemplo, funciones de la clase de Schwartz, $\mathcal{S}$, quien es densa en $L^2(R, \rho(x)dx)$. Recordamos que $f \in \mathcal{S}$ si satisface los dos condiciones siguientes:

- $f \in \mathcal{C}^\infty$

- f y todas sus derivadas son a decrecimiento rápido: $\forall m, j$, $|x^m||f^{(j)}(x)| \to 0$ para $|x| \to \infty$.

Introducimos las abreviaciones siguientes:

$$a \quad =\equiv \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x + d_x) \tag{11.4}$$

$$a^\dagger \quad \equiv \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x - d_x) \tag{11.5}$$

Para $f, g \in \mathcal{S}$, tenemos, por integración por parte,

$$< f|a^\dagger g >=< af|g > \tag{11.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})\ (x - d_x)g(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x + \bar{d_x})f(x)\ g(x)\ dx \tag{11.7}$$

por que el término todo integrado es cero a $\pm\infty$. Los "objectos H, a y $a^\dagger$ son llamados operadores lineales en $L^2(R, \rho(x)dx)$. Ahora vamos a estudiar las propiedades algebraícas de tal objecto y todas las relaciones que vamos a obtener se aplica a elementos de $\mathcal{S}$.

Primero, vamos a calcular el comutator de a y $a^\dagger$,

$$[a, a^\dagger]f \quad = \quad (aa^\dagger - a^\dagger a)f \tag{11.8}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\left[(x + d_x)(x - d_x) - (x - d_x)(x + d_x)\right] f \tag{11.9}$$

$$= \quad f \tag{11.10}$$

Entonces, tenemos

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{11.11}$$

De la misma manera, podemos calcular el anti-comutator de a y $a^\dagger$, y tenemos,

$$\{a, a^\dagger\}f \quad \equiv \quad (aa^\dagger + a^\dagger a)f \tag{11.12}$$

$$= \quad x^2 f - f^{''} \tag{11.13}$$

$$= \quad 2H\ f \tag{11.14}$$

es decir,

$$\{a, a^\dagger\} = 2H \tag{11.15}$$

Entonces tenemos las relaciones siguientes,

$$H + \frac{1}{2} \quad = \quad aa^\dagger \tag{11.16}$$

$$H - \frac{1}{2} \quad = \quad a^\dagger a \tag{11.17}$$

$$[H, a] = -a \tag{11.18}$$

$$[H, a^\dagger] = a^\dagger \tag{11.19}$$

Regresamos a la ecuación de los valores propios iniciales. Primero, vamos a probar que si existe un valor propio E, este valor propio tiene que ser positivo: $E \geq 0$.

$$\begin{aligned} E||f||^2 &= < f|Hf > && (11.20) \\ &= \frac{1}{2} < f|(aa^\dagger + a^\dagger a)f > && (11.21) \\ &= \frac{1}{2}(||a^\dagger f||^2 + ||af||^2 && (11.22) \\ &\geq 0 && (11.23) \end{aligned}$$

Nos queda a probar que existen soluciones de cuadrado integrable. Por eso, vamos a suponer que f_n es un solución cuadrado integrable, de valor propio E_n:

$$\begin{aligned} Hf_n &\equiv E_n f_n && (11.24) \\ \Rightarrow H(af_n) &= (aH + [H, a])f_n && (11.25) \\ &= (E_n - 1)af_n && (11.26) \end{aligned}$$

es decir que af_n es también un vector propio de valor propio $E_{n-1} \equiv E_n - 1$. De la misma manera, tenemos

$$Ha^\dagger f_n = (E_n + 1)a^\dagger f_n \tag{11.27}$$

es decir que $a^\dagger f_n$ es también un vector propio de valor propio $E_{n+1} = E_n + 1$.

Repitiendo la operación, obtenemos a partir de f_n una seguida de vectores propios $a^k f_n$ de valores propios $E_{n-k} = E_n - k$, con $k = 0, 1, 2, 3, ...$ Pero, como todos los valores propios tienen que ser positivos, debe existir un vector f_0 en esta seguida de vectores propios tal que

$$af_0 = 0 \tag{11.28}$$

es decir que f_0 satisface la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$(x + d_x)f_0 = 0 \tag{11.29}$$

Podemos resolver fácilmente esta ecuación y la solución es

$$f(x) = e^{-x^2/2} \tag{11.30}$$

El valor propio correspondiente es $E_0 = 1/2$ como se puede verificar por la identidad siguiente:

$$Hf_0 = (a^\dagger a + \frac{1}{2})f_0 = \frac{1}{2}f_0 \tag{11.31}$$

y esta solución no es degenerada. Es fácil de verificar que $f_0 \in \mathcal{S}$.

A partir de esta solución minimal, podemos obtener una seguida infinita de vectores propios:

$$f_n = (a^\dagger)^n f_0 \tag{11.32}$$

de valores propios $E_n = E_0 + n = n + 1/2$. Cada uno de esos vectores propios son no-degenerados. Así todas esas soluciones tienen la misma forma:

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}}(x - d_x)^n e^{-x^2/2} \quad (11.33)$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}} H_n(x) e^{-x^2/2} \quad (11.34)$$

donde $H_n(x)$ es un polinomio de grado n, llamado ***polinomio de Hermite***.

Los vectores propios f_n satisfacen los dos propiedades siguientes:

- los vectores propios f_n son 2 a 2 ortogonales:

$$E_m < f_n|f_m > = < f_n|Hf_m > \quad (11.35)$$

$$= < Hf_n|f_m > \quad (11.36)$$

$$= E_n < f_n|f_m > \quad (11.37)$$

  es decir que

$$(E_n - E_m) < f_n|f_m > = 0 \quad (11.38)$$

$$\Rightarrow < f_n|f_m > = 0 \text{ si } n \neq m \quad (11.39)$$

- cuanto a la normalización, tenemos

$$||f_n||^2 = ||a^\dagger f_{n-1}||^2 = < a^\dagger f_{n-1}|a^\dagger f_{n-1} > \quad (11.40)$$

$$= < f_{n-1}|aa^\dagger f_{n-1} > \quad (11.41)$$

$$= < f_{n-1}|(H + \frac{1}{2})f_{n-1} > \quad (11.42)$$

$$= n||f_{n-1}||^2 \quad (11.43)$$

  Y entonces, por iteración tenemos,

$$||f_n|| = n!||f_0||^2 \quad (11.44)$$

  y para f_0, podemos hacer el cálculo explícito de la norma,

$$||f_0||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (11.45)$$

  Así, podemos definir las ***funciones de Hermite como***

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}}} f_n(x) = \frac{H_n(x)e^{-x^2/2}}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{1/2}} \quad (11.46)$$

<u>Teorema 11.1.1:</u> *el sistema de los polinomios de Hermite* $\{H_n(x), n = 0, 1, 2, ...\}$ *es una base ortogonal sobre* $L^2(R, e^{-x^2}dx)$, *o de manera equivalente, el sistema* *de funciones de Hermite* $\{\phi_n(x), n = 0, 1, 2, ...\}$ *es una base ortonormal sobre* $L^2(R, dx)$.

Regresamos a las propiedades de las funciones de Hermite ϕ_n. Obtenemos muy fácilmente las relaciones de recurrencia:

$$a\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1} \tag{11.47}$$

$$a^\dagger\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1} \tag{11.48}$$

$$\Rightarrow x\phi_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\phi_{n-1} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\phi_{n+1} \tag{11.49}$$

$$\frac{1}{i}d_x\phi_n = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{n}{2}}\phi_{n-1} - \frac{1}{i}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\phi_{n+1} \tag{11.50}$$

Usando la base $\{\phi_n\}$, podemos realizar el espacio $L^2(R, dx)$ como el espacio de Hilbert l^2 [1]

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n \leftrightarrow (c_n) \equiv \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} \tag{11.51}$$

En particular, tenemos

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}, ... \tag{11.52}$$

En esta realización, los operadores a y $a^\dagger$ son representados por matrices infinita A y$A^\dagger$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & ... \\ .. & .. & .. & .. & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.53}$$

$$A^\dagger = A^t \tag{11.54}$$

[1] ver capítulo sobre espacio de Hilbert para encontrar la definición del espacio de Hilbert l^2.

Es fácil de ver que estas dos matrices son hermitiana conjuguada una de la otra y verifican las siguientes relaciones:

$$[A, A^\dagger] = 1, \quad \{A, A^\dagger\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 3 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 5 & 0 & ... \\ .. & .. & .. & .. & ... \end{pmatrix} \tag{11.55}$$

Si consideramos las matrices $Q \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^\dagger)$ y $P \equiv \frac{1}{i\sqrt{2}}(A - A^\dagger)$, tenemos

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & ... \\ \sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{2/2} & 0 & ... \\ 0 & \sqrt{2/2} & 0 & \sqrt{3/2} & ... \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & ... \\ .. & .. & .. & .. & ... \end{pmatrix}, \tag{11.56}$$

$$P = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & 0 & ... \\ -\sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{2/2} & 0 & ... \\ 0 & -\sqrt{2/2} & 0 & \sqrt{3/2} & ... \\ 0 & 0 & -\sqrt{3/2} & 0 & ... \\ .. & .. & .. & .. & ... \end{pmatrix} \tag{11.57}$$

Estas dos matrices son hermitiana y verifican la relación

$$[Q, P] = i1 \tag{11.58}$$

y realizan la acción del operador x y $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ en la base $\{\phi_n\}$. Podemos verificar muy fácilmente que estos dos operadores x y $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ satisfacen la misma relación de comutación que Q yP, a saber

$$[x, \frac{1}{i}\frac{d}{dx}] = i1 \tag{11.59}$$

Para acabar, vamos a estudiar los polinomios de Hermite $H_n(x)$ que son definidos a partir de la relación

$$H_n(x) = e^{x^2/2}(x - d_x)^n e^{-x^2/2} \tag{11.60}$$

Esta relación es una fórmula de Rodrigues pero usualmente, la fórmula de Rodrigues tiene esta expresión:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \tag{11.61}$$

La igualdad entre esos dos expresiones resulta de la idendidad siguiente, válida para cualquier función $h(x)$ suficientamente regular:

$$(x - d_x)(h(x)e^{-x^2/2} = -e^{x^2/2} d_x(he^{-x^2}) \tag{11.62}$$

Para probarlo, vamos a proceder por recurrencia. Para $n = 1$, la demostración es inmediata. Vamos a suponer la igualdad para $n = N$ y vamos a verificar que la relación es válida para $n = N + 1$

$$
\begin{aligned}
e^{x^2/2}(x - d_x)e^{-x^2/2} &= e^{x^2/2}(x - d_x)((x - d_x)^N e^{-x^2/2}) && (11.63)\\
&= e^{x^2/2}(x - d_x)(H_N^(x)e^{-x^2/2}) && (11.64)\\
&= -e^{x^2} d_x(H_N(x)e^{-x^2}) && (11.65)\\
&= -e^{x^2} d_x((-1)^N d_x^N e^{-x^2}) && (11.66)\\
&= (-1)^{N+1} e^{x^2} d_x^{N+1} e^{-x^2} && (11.67)
\end{aligned}
$$

donde usamos la igualdad justo anterior para pasar de la 2o a la 3o línea. Pasamos de la 3o a la 4o línea usando el hecho que suponemos que la equivalencia entre las dos formulas de Rodrigues es válida para N.

A partir de la fórmula de Rodrigues, de nuevo podemos obtener las relaciones de recurrencia para los polinomios de Hermite $H_n(x)$:

$$
\begin{aligned}
2x\ H_n &= H_{n+1} + H_n^{'} && (11.68)\\
2x\ H_n &= H_{n+1} + 2nH_{n-1} && (11.69)\\
H_n^{'} &= 2n\ H_{n-1} && (11.70)
\end{aligned}
$$

También obtenemos la ecuación diferencial de los polinomios de Hermite:

$$H_n^{''} - 2xH_n + 2nH_n = 0 \qquad (11.71)$$

es decir que los polinomios de Hermite H_n son soluciones de la ecuación a valores propios:

$$y^{''} - 2xy^{'} + 2ny = 0 \qquad (11.72)$$

Para $n \in N$, las soluciones de cuadrado integrable son los polinomios de Hermite. Esos polinomios son ortogonales para la medida gaussiana $e^{x^2}dx$, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{nm} \qquad (11.73)$$

Los polinomios de Hermite tienen también su función de generación, $f(x,t)$:

$$f(x,t) = e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (11.74)$$

11.2 Aplicaciones de las funciones de Hermite

Las funciones de Hermite tienen un papel muy importante en varios campos de la física y de las matemáticas: en mecánica cuántica, en teoría cuántica relativista de los campos, en probabilidad, en teoría de las distribuciones. Vamos a illustrar nadamas su importancia en mecánica cuántica.

11.2.1 Ejemplo: aplicación en mecńica cuántica: el oscillator armónico

Las funciones de Hermite ϕ_n son funciones propias del oscillator armónico a 1 dimensión en mecánica cuántica. El Hamiltoniano clásico del oscillator armónico es

$$H_{cl} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\omega}{2} q^2 \tag{11.75}$$

donde P es la cuantidad de movimiento y q la posición del oscillator armónico. La ecuación de Schrodinger correspondiente a H_{cl} es

$$H\Psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) + \frac{\omega}{2} x^2 \right) \Psi(x) = E\Psi(x) \tag{11.76}$$

es decir, a la constante cerca, la ecuación diferencial (11.1). La ecuación (11.76) es una ecuación a valores propios y sus soluciones de cuadrado integrable son las funciones de onda de los estados propios del sistema y los valores propios son los niveles de energía correspondiente. Esas soluciónes son las funciones de Hermite $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, ...$ y los niveles de energía son $E_n = n + 1/2$, esos niveles son equidistantes y no-degenerados. El hamiltoniano H del oscillator armónico describe un sistema en vibración alrededor de un punto de equilibrio (por ejemplo, átomos en un cristal, átomos en una molécula).

Además, podemos dar un sentido físico directo a los operadores a y $a^\dagger$ y $a^\dagger a \equiv N$. El operador a: $\phi_n \to \phi_{n-1}$ disminuye la energía de una unidad o cuantum, así vamos a llamarlo ***operador de anihilación***. De la misma manera, $a^\dagger$: $\phi_n \to \phi_{n+1}$ aumenta la energia de un cuantum, es un operador de creación. $N = a^\dagger a$ contra el número de cuanta presentes por que podemos fácilmente verificar que

$$N\phi_n = n\phi_n \tag{11.77}$$

N es el operador ***"número de cuanta"***.

Podemos proceder de manera identica para un oscillator armónico a d grados de libertad: para cada grado de libertad, introducimos un operador de anihilación a_j, un operador de creación $a_j^\dagger$ y un operador número de cuanta $N_j = a_j^\dagger a_j$ de valores propios $n_j = 0, 1, 2, ...$

Estos operadores verifican ***las relaciones de conmutación canónica***:

$$[a_j, a_k] = 0 \tag{11.78}$$

$$[a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \tag{11.79}$$

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk} 1 \tag{11.80}$$

Es Dirac quien fue el primero a tener la idea de pasar al límite $d \to \infty$ para describir la versión cuantificada del campo electromagnético. Dirac encontro así la hipótesis inicial de Planck: del punto de vista energético, el campo electromagnético es completamente equivalente a una familia infinita de oscilladores armónicos.

Esta manera de hacer, basada sobre el operador de creación y de anihilación, es muy general y se aplica a cualquier sistema cuántica comportando un número indeterminado de "objectos " elementales idénticos (cuanta). Este formalismo, llamado ***"segunda cuantificación"*** se encuentra en física del estado sólido (fonons, por ejemplo), en electrodinámica cuántica (fotons), en física nuclear y de las partículas elementales (para todo tipo de partículas).

Capitulo 12

Polinomios ortogonales sobre R^+: polinomios de Laguerre

12.1 Los polinomios de Laguerre ordinarios

Vamos a necesitar como para los polinomios de Hermite una función de peso. La elección natural como función de peso es una exponencial e^{-x}. La teoría sobre $[0, \infty]$ se desarrolla de manera análoga al capítulo anterior. Pero este vez, vamos a empezar con la función de generación:

$$\frac{e^{-\frac{xt}{(1-t)}}}{(1-t)} \equiv \sum_{p=0}^{\infty} L_p(x) t^p, \quad |t| < 1 \tag{12.1}$$

Los coeficientes $L_p(x)$ son polinomios de grado p, llamados ***polinomios de Laguerre***.

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{x^m t^m}{(1-t)^{m+1}} && (12.2) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(m+n)!}{m!n!} x^m t^{m+n} && (12.3) \end{aligned}$$

donde usamos la siguiente serie para llegar al resultado anterior:

$$\frac{1}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} t^n \tag{12.4}$$

Entonces, tenemos

$$
\begin{aligned}
L_p(x) &= \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{p!}{m!(p-m)!} x^m && (12.5)\\
&= \sum_{m=0}^{p} (-1)^m C_p^m \frac{x^m}{m!} && (12.6)
\end{aligned}
$$

En particular, tenemos

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 && (12.7)\\
L_1(x) &= 1-x && (12.8)\\
L_2(x) &= 1-2x+\frac{1}{2}x^2 && (12.9)
\end{aligned}
$$

También tenemos una fórmula de Rodrigues:

$$L_p(x) = \frac{1}{p!} e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^p (e^x x^p) \qquad (12.10)$$

A partir de esta relación, verificamos fácilmente la ortogonalidad sobre R^+:

$$\int_0^\infty L_p(x) L_q(x) e^{-x} dx = \delta_{pq} \qquad (12.11)$$

De esta relación podemos derivar dos enunciados equivalentes:

- las funciones $\{L_p(x)\}$ forman un sistema ortonormal sobre $L^2(R^+, e^{-x}dx)$.
- las funciones $\{L_p(x)e^{-x/2}\}$ forman un sistema ortonormal sobre $L^2(R^+, dx)$.

A partir de la función de generación podemos obtener las relaciones de recurrencia exactamente como por los polinomios de Legendre:

(i) Derivando en la variable t la función de generación, tenemos

$$(p+1)L_{p+1} + (x-2p-1)L_p + pL_{p-1} = 0 \qquad (12.12)$$

(ii) Derivando en la variable x la función de generación, tenemos

$$L'_{p+1} - L'_p + L_p = 0 \qquad (12.13)$$

Combinando estas dos ecuaciones, obtenemos la ecuación diferencial de los polinomios de Laguerre:

$$xL''_p + (1-x)L'_p + pL_p = 0 \qquad (12.14)$$

Los polinomios de Laguerre son soluciones de la ecuación de Laguerre quien es de nuevo una ecuación a valores propios:

$$x\, y'' + (1-x)y' + py = 0 \qquad (12.15)$$

y es la única solución de cuadrado integrable, es decir es la unica solución perteneciendo a $L^2(R^+, e^{-x}dx)$ y regular en $x = 0$.

- para $p = 0, 1, 2, ...$: tenemos una solución de cuadrado integrable (solución L^2), el polinomio de Laguerre $L_p(x)$ y una otra solución que no es de cuadrado integrable (no L^2).
- para $p \neq 0, 1, 2, ...$: dos soluciones linealmente independiente pero ningunas es de cuadrado integrable.

En Resumen tenemos, como para los polinomios de Legendre o de Hermite,

Teorema 12.3.1: *el sistema de los polinomios de Laguerre* $\{L_p(x), p = 0, 1, 2, ..\}$ *es una base ortogonal sobre* $L^2(R^+, e^{-x}dx)$.

12.2 Los polinomios de Laguerre asociados

De hecho, no son los polinomios $L_p(x)$ que son los más útiles pero son polinomios más generales, llamados ***polinomios de Laguerre asociados*** definido por la función de generación siguiente:

$$\frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} L_p^{(\alpha)}(x) t^p, \quad (\alpha \in R y \alpha \geq 0) \tag{12.16}$$

$$\Rightarrow L_p^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^m C_{p+\alpha}^{p-m} \frac{x^m}{m!} \tag{12.17}$$

El coeficiente binomial estando definido de manera apropriada para valores no-entera de los parámetros: para eso, es suficiente de cambiar la factorial m! por $\Gamma(m+1)$ donde $Gamma(x)$ es la función Gamma de Euler.

Como en los casos anteriores, tenemos

- una fórmula de Rodrigues:

$$L_p^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{p!} e^x x^{-\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^p (e^{-x} x^{p+\alpha}) \tag{12.18}$$

- una relación de ortogonalidad:

$$\int_0^{\infty} L_p^{(\alpha)}(x) L_q^{(\alpha)} e^{-x} x^{\alpha} = \delta_{pq} \frac{(\alpha+p)!}{p!} \tag{12.19}$$

- una ecuación diferencial:

$$x(L_p^{(\alpha)})'' + (\alpha + 1 - x)(L_p^{(\alpha)})' + p L_p^{(\alpha)} = 0 \tag{12.20}$$

Teorema 12.2.1: $\forall \alpha > -1$, *el sistema de polinomios de Laguerre asociados* $\{L_p^{(\alpha)}(x), p = 0, 1, 2, ...\}$ *es una base ortogonal sobre* $L^2(R^+, e^{-x} x^{\alpha} dx)$.

12.3 Aplicación al átomo de Hidrógeno en mecánica cuántica

La principal aplicación de los polinomios de Laguerre asociados se encuentra en mecánica cuántica en el estudio del átomo de hidrógeno. El problema consiste a resolver la ecuación de Schrodinger con un potencial coulombiano $-e^2/r$, es decir encontrar las soluciones de cuadrado integrable de la ecuación a valores propios:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\triangle - \frac{e^2}{r}\right)\Psi(\overrightarrow{r}) = E\Psi(\overrightarrow{r}) \tag{12.21}$$

Para eliminar las constantes vamos a introducir las siguientes cuantidades:

(i) $r_b \equiv \frac{\hbar^2}{me^2}$ es el radio de Bohr del átomo de hidrógeno.

(ii) $E_0 \equiv \frac{me^4}{2\hbar^2}$ es el energía de ionización del átomo de hidrógeno en su estado fundamental.

También vamos a trabajar, por simplicidad, en unidades atómicas (sin dimensión) r/r_b y E/E_0. En este caso, la ecuación de Schrodinger se transforma en

$$\Rightarrow (\triangle + \frac{2}{r} + E)\Psi = 0 \tag{12.22}$$

donde ahora las derivadas son en las variables expresada en unidades atómicas. Haciendo la separación de variables en coordenadas polares esféricas,

$$\Psi(r) = R_l(r)Y_l^m(\theta, \phi) \tag{12.23}$$

donde $Y_l^m(\theta, \phi)$ son las armónicas esféricas. Por la parte radial, tenemos la ecuación

$$R_l^{''} + \frac{2}{r}R_l^{'} + (\frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + E)R_l = 0 \tag{12.24}$$

Las soluciones de cuadrado integrable corresponden a los estados ligados, es decir a $E < 0$. Para encontrarlos, vamos primero a buscar el comportamiento asimptotico de las soluciones a los puntos críticos que son $r = 0$ y $r = \infty$.

(i) $r \to \infty$, la parte dominante de la ecuación es

$$R_l^{''} + ER_l = 0 \tag{12.25}$$

Las soluciones de esta ecuación son $R_l = e^{\pm\sqrt{-E}r}$. El signo más es a rechazar y nos queda como solución para $r \to \infty$,

$$R_l(r) \approx e^{-\rho/2}, \text{ con } \rho \equiv 2r\sqrt{-E} \tag{12.26}$$

(ii) $r \to 0$: para $l \neq 0$, la parte dominante de la ecuación es

$$R_l^{''} + \frac{2}{r}R_l^{'} - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l = 0 \tag{12.27}$$

Esta ecuación es homogénea en r y admite entonces una solución de la forma $R_l(r) = r^\beta$ satisfaciendo la relación:

$$\beta(\beta + 1) = l(l + 1) \tag{12.28}$$

es decir que $\beta = l$ o $\beta = -(l + 1)$. La segunda solución correspondiente a $\beta = -(l + 1)$ no es de cuadrado integrable en $r = 0$ y entonces tenemos que rechazarlo. Para $l = 0$, el mismo razonamiento da $\beta(\beta + 1) = 0$, es decir $\beta = 0$ o $\beta = -1$. La solución en r^{-1} es de cuadrado integrable en $r = 0$ pero no su gradiente, lo que no es fisicamente admisible. Tenemos entonces que rechazar esta solución.

En conclusión, tenemos en todos los casos $l \geq 0$, $R_l(r) \approx r^l$ si $r \to 0$.

Basado sobre esos dos comportamientos asimptóticos, vamos a introducir en la ecuación de Schrodinger el "Anzatz" siguiente:

$$R_l(\rho) = e^{-\rho/2}\rho^l L(\rho) \tag{12.29}$$

lo que da para $L(\rho)$ la ecuación siguiente:

$$\rho L^{''} + (2l + 2 - \rho)L^{'} + (\frac{1}{\sqrt{-E}} - l - 1)L = 0 \tag{12.30}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación de los polinomios de Laguerre asociados, vemos que son iguales si hacemos las identificaciones siguientes:

$$\alpha = 2l + 1 \tag{12.31}$$
$$p = \frac{1}{\sqrt{-E}} - l - 1 \tag{12.32}$$

Para que la solución sea de cuadrado integrable y aceptable fisicamente, necesitamos que p sea un entero positivo, es decir

$$\frac{1}{\sqrt{-E}} = p + l + 1 = n \geq 1 \tag{12.33}$$

Y entonces,

$$E = \frac{-1}{n^2},\ n = 1, 2, ... \tag{12.34}$$

Eso nos da directamente la ley de Balmer sobre los niveles de energía de los estados ligados del átomo de hidrógeno.

Ahora, podemos escribir completamente la solución de la ecuación de Schrodinger del átomo de hidrógeno, es decir la función de onda del electrón ligado:

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = e^{-r/n}\left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n-l-1}^{(2l+1)}(\frac{2r}{n})Y_l^m(\theta, \phi) \tag{12.35}$$

La energía correspondiente es $E_n = -1/n^2$ y es entonces independiente de l y m. Los valores de los parámetros son

$$n = 1, 2, ... \quad (12.36)$$

$$l = 0, 1, ..., n-1 \quad (12.37)$$

$$m = -l, ..., l \quad (12.38)$$

Si cambiamos el potencial coulombiano e^2/r por cualquier potencial central $V(r)$, los valores propios de la energía van a depender de l y de n y la multiplicidad de cada nivel E_{nl} sería igual a $(2l+1)$ expresando la simetría esférica del potencial. En el caso coulombiano, tenemos además una degenerescencia en l, dicha "accidental" y la multiplicidad de cada nivel E_n es $\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$.

Capitulo 13

Teoría general de los polinomios ortogonales

Estudiamos sucesivamente los sistemas de polinomios ortogonales de Legendre sobre $[-1,1]$, de Hermite sobre R y de Laguerre sobre R^+. Claramente esos 3 sistemas de polinomios tienen muchos puntos en común y no es una sorpresa que podemos hacer una téoría general de los polinomios ortogonales.

Sea un intérvalo $[a,b]$ acotado o no, buscamos entonces a construir un sistema ortogonal de polinomios $\{p_n(x), n = 0, 1, 2...\}$ sobre $[a,b]$, es decir que para cada n, tenemos la siguiente relación:

$$\int_a^b p_n(x) p_m(x) \rho(x) dx = c_n \delta_{nm} \tag{13.1}$$

Proposición 13.1: *El polinomio $p_n(x)$ tiene n raíces reales sobre $[a,b]$*

Prova:

Sea $\{x_j\}_1^k$ todas las raíces de $p_n(x)$ de multiplicidad impar y sea $\Pi(x) \equiv \prod_{j=1}^k (x - x_j)$. Entonces el polinomio $\Pi(x)p_(x)$ no cambia de signo sobre $[a,b]$ por que todas sus raíces son de multiplicidad par y entonces,

$$\int_a^b \Pi(x)\ p_n(x)\ \rho(x)\ dx \neq 0 \tag{13.2}$$

Pero, en virtud de la ortogonalidad de los p_n, eso implica que $\Pi(x)$ es de grado n, es decir que $p_n(x)$ tiene n raíces x_j sobre $[a,b]$.

Proposición 13.2: *Los polinomios $p_n(x)$ pueden ser representado por una* *fórmula de Rodrigues.*

<u>Prova:</u>
Consideramos la función:

$$F_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (\rho(x) W^n(x)) \tag{13.3}$$

donde

$$W(x) = (b-x)(x-a) \qquad \text{si } a, b < \infty \tag{13.4}$$
$$W(x) = (x-a) \qquad \text{si } a < \infty \text{ y } b = \infty \tag{13.5}$$
$$W(x) = 1 \qquad \text{si } a = -\infty, b = \infty \tag{13.6}$$

Buscamos a cuales condiciones la fórmula (13.3) defino una familia de polinomios ortogonales al sentido de (13.1). Tenemos que tratar los tres casos (a, b finitos, a finito y $b = \infty$, $a = -\infty$ y $b = \infty$) separamente:

(1) a, b finitos $\Rightarrow W(x) = (b-x)(x-a)$,

$F_1(x)$ tiene que ser un polinomio de grado uno. Sea $F_1(x) = Ax + B$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(\rho W) = W' + \frac{\rho'}{\rho} W = Ax + B \tag{13.7}$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{d}{dx} \ln \rho = \frac{Ax + B - W'}{W} \tag{13.8}$$
$$= \frac{(A+2)x - (a+b-B)}{(b-x)(x-a)} \tag{13.9}$$
$$= \frac{-\beta}{b-x} + \frac{\alpha}{x-a} \tag{13.10}$$

Por integración, obtenemos

$$\ln \rho(x) = \beta \ln(b-x) + \alpha \ln(x-a) + \ln \gamma \tag{13.11}$$
$$= \ln \left[(b-x)^\beta (x-a)^\alpha\right] + \ln \gamma \tag{13.12}$$
$$\Rightarrow \rho(x) = \gamma (b-x)^\beta (x-a)^\alpha \tag{13.13}$$

Además, $F_0(x) =$ constante y usando (13.1), obtenemos

$$\int_a^b F_0^2(x) \rho(x) dx = cst \int_a^b \rho(x) dx < \infty \tag{13.14}$$

lo que implica que $\alpha, \beta > -1$ (pero no necesariamente enteros).

Obtenemos entonces la fórmula de Rodrigues:

$$F_n^{(\alpha,\beta)} = (b-x)^{-\beta}(x-a)^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[(b-x)^{\beta+n}(x-a)^{\alpha+n}\right] \quad (13.15)$$

Usando la fórmula de Liebniz, vemos inmediatamente que $F_n^{(\alpha,\beta)}$ es un polinomio de grado n. La relación de ortogonalidad (13.1) es una consecuencia de (13.15) por integración por parte. En efecto, $\rho(x)$ se anula a los límites $x = a$ y $x = b$.

Escogiendo los valores de α y β, obtenemos las diferentes familias de polinomios ortogonales citado en el capítulo 10 sobre los polinomios de Legendre.

(2) a finito, $b = \infty$, $W(x) = (x-a)$

Razonamiento análogo al caso anterior, tenemos $F_1(x) = Ax + B$ y entonces,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\rho^{'}}{\rho} &= \frac{Ax+B-1}{x-a} = A + \frac{\alpha}{x-a} && (13.16)\\
\ln\rho &= Ax + \alpha\ln(x-a) + \ln\gamma && (13.17)\\
\Rightarrow \rho(x) &= Ce^{Ax}(x-a)^{\alpha} && (13.18)\\
\int_a^{\infty} F_0^2(x)\ \rho(x)dx &= \gamma\int_a^{\infty} e^{Ax}(x-a)^{\alpha}dx < \infty && (13.19)
\end{aligned}$$

eso implica $A < 0$ y $\alpha > -1$, normalizamos a $A = -1$ y $\gamma = 1$.

$$\Rightarrow \rho(x) = e^{-x}(x-a)^{\alpha} \quad (13.20)$$

Sobre $[0,\infty]$, obtenemos los polinomios de Laguerre asociados $L_p^{(\alpha)}(x)$ ($\alpha > -1$) y los polinomios de Laguerre $L_p(x)$ para $\alpha = 0$.

(3) $a = -\infty$ y $b = \infty$, $W(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{\rho^{'}}{\rho} = Ax + B && (13.21)\\
\ln\rho &= A\frac{x^2}{2} + Bx + C && (13.22)\\
\Rightarrow \rho(x) &= e^{\frac{1}{2}Ax^2+Bx+C} && (13.23)
\end{aligned}$$

Para que $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)dx < \infty$, tenemos que tener $A < 0$. Además, podemos eliminar el término B por una transformación $x \rightarrow x - j$, lo que finalmente nos da como función de peso:

$$\rho(x) = e^{-x^2/2} \quad (13.24)$$

En resumen, en cada uno de los tres casos, la función de peso es determinada por la condición de ortogonalidad y de integrabilidad (ecuación (13.1)). Obtenemos una familia ortogonales de polinomios perteneciendo a el espacio de Hilbert $L^2([a,b], \rho(x)dx)$. Provamos además que es a cada vez una base de este espacio de Hilbert. De la misma manera que para la fórmula de Rodrigues, podemos establecer en toda generalidad:

- una fórmula de recurrencia a 3 términos:

$$p_{n+1} = (A_n x + B_n) p_n(x) + C_n p_{n-1}(x) \tag{13.25}$$

  donde todos los coeficientes A_n, B_n y C_n pueden ser obtenidos explícitamente.

- una ecuación diferencial de 2o grado que es siempre una ecuación a valores propios:

$$W(x) p_n^{''}(x) + K_1 p_1(x) p_n^{'}(x) + \lambda_n p_n(x) = 0 \tag{13.26}$$

Notamos antes de acabar este capítulo que todos esas propiedades remarcable de esas familias de polinomios ortogonales vienen de la relación estrecha entre esos polinomios y los elementos de latrices de las representaciones de algunos algebra de Lie pero esta tema va muy adelante del temario de este curso.

Capitulo 14

Ejercicios

1. ***Sea*** $\overrightarrow{A} = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$***, hallar*** $\oint_C \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{dl}$ ***entre los puntos*** $(0,0,0)$ ***y*** $(1,1,1)$

   (a) Con C igual a (t, t^2, t^3).

   (b) Con C igual a la linea derecha que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.

2. ***Integrar*** $(4x+2y)dx+(2x-6y)dy$ ***sobre una curva de*** $(0,0)$ ***a*** $(1,1)$ ***y enseñar que esta integral es independiente del camino seguido.***

3. ***Hallar el flujo de*** $\overrightarrow{A} = (y, x, -3y^2z)$ ***a traves de la superficie de un cilindro de ecuación:*** $x^2+y^2 = 16$ ***y*** $0 \leq z \leq 5$ ***usando dos métodos diferentes.***

4. ***Sea el campo vectorial*** $\overrightarrow{F} = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x, y, z)$ ***definido sobre*** $\{(x, y, z)$ ***tal que*** $x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$

   (a) Provar que $\overrightarrow{F}$ es solenoidal.

   (b) Pero que $\overrightarrow{F} \neq \mathrm{rot}\overrightarrow{A}$ (indicio: evaluar el flujo de $\overrightarrow{F}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

5. ***Sea el campo*** $\overrightarrow{F} = (x^2 + y^2)^{-1}(-y, x)$ ***definido sobre*** $\{(x, y)$ ***tal que*** $x^2 + y^2 > 0\}$***.***

   (a) Provar que $\overrightarrow{F}$ es irrotacional.

   (b) Pero que $\overrightarrow{F} \neq$ gradϕ (indicio: evaluar la integral de $\overrightarrow{F}$ a lo largo de $x^2 + y^2 = 1$).

6. ***Provar que:***

   (a) $\int_V \overrightarrow{\nabla}\phi(\overrightarrow{r})dV = \oint_S \phi(\overrightarrow{r})d\overrightarrow{S}$ (indicio: poner $f = \phi\overrightarrow{u}$ con $\overrightarrow{u}$ un vector constante).

(b) $\int_V \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V}(\overrightarrow{r}) = \oint_S d\overrightarrow{S} \times \overrightarrow{V}(\overrightarrow{r})$ (indicio: poner $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{V} \times \overrightarrow{u}$ con $\overrightarrow{u}$ un vector constante).

7. ***demostrar las idenditades vectoriales seguientes:***

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) && (14.1) \\
\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} && (14.2) \\
(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) && (14.3) \\
\nabla \wedge \nabla\psi &= 0 && (14.4) \\
\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) &= 0 && (14.5) \\
\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2\vec{a} && (14.6) \\
\nabla \cdot (\psi\vec{a}) &= \vec{a} \cdot \nabla\psi + \psi\nabla \cdot \vec{a} && (14.7) \\
\nabla \wedge (\psi\vec{a}) &= \nabla\psi \wedge \vec{a} + \psi\nabla \wedge \vec{a} && (14.8) \\
\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} \\
&\quad +\vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) && (14.9) \\
\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\nabla \wedge \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{b}) && (14.10) \\
\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) &= \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} \\
&\quad -(\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} && (14.11)
\end{aligned}
$$

8. ***demostrar la forma del gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas no-cartesianas***

(a) coordenadas polares(2 dim.): (r, ϕ)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

(b) coordenadas polares esféricas: (r, θ, ϕ)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

(c) coordenadas polares cilíndricas: (ρ, ϕ, z)

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

9. ***Obtener las series de Fourier de las funciones seguientes (siempre expresar el resultado con funciones reales)***

$$f(x) = \begin{cases} -c & -l < x < 0 \\ c & 0 < x < l \end{cases} \tag{14.12}$$

con $f(x)$ definida sobre $]-l, l[$

$$f(x) = x \text{ sobre }]0, 2\pi[\tag{14.13}$$

$$f(x) = x^2 \text{ sobre }]0, 2\pi[\tag{14.14}$$

$$f(x) = \begin{cases} (1-a)x & 0 \leq x \leq a \\ a(1-x) & a \leq x \leq 1 \\ -f(-x) & -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \tag{14.15}$$

con $f(x)$ definida sobre $]-1, 1[$

$$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < 0 \\ 2x & 0 < x < \pi \end{cases} \tag{14.16}$$

con $f(x)$ definida sobre $]-\pi, \pi[$

$$f(x) = \sin(x) \text{ sobre }]0, \pi[\tag{14.17}$$

10. ***Calcular las sumas seguientes usando la desigualdad de Parseval:***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{14.18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \tag{14.19}$$

11. ***Calcular las transformadas de Fourier de las funciones siguientes:***

$$f(x) = e^{-a(x-m)^2} \tag{14.20}$$

$$f(x) = e^{-a|x|} \qquad a > 0 \tag{14.21}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \quad e^{-\frac{y^2+(x-y)^2}{2}} \tag{14.22}$$

$$f(x) = x \quad e^{-x^2/2} \tag{14.23}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ g(y)\ g(x-y) \tag{14.24}$$

$$\text{con } g(x) = \begin{cases} x & (-l \leq x \leq l) \\ 0 & \end{cases}$$

12. ***Usar el teorema de Plancherelle y los resultados precedentes para calcular las integrales siguientes:***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(k^2+a^2)(k^2+b^2)} \tag{14.25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{(k^2+a^2)((k-p)^2+b^2)} \tag{14.26}$$

13. ***Resolver el ecuacion diferencial de un circuito RLC (ver curso de electromagnetismo) usando las integrales de Fourier***

    El ecuacion diferencial de un circuito RLC se escribo como

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = f(t)$$

con $I(t)$ como la corriente electrica y $f(t)$ una función conocida. Una solución particular de esta ecuación puede encontrarse usando las propiedades de la transformada de Fourier:

a. Hacer la transformada de Fourier de los dos miembros de la ecuación RLC y expresar la transformada de Fourier (TF) de $I(t)$ en funcion de la TF de $f(t)$.

b. Calcular $I(t)$ a partir de su TF usando el teorema de convolución.

c. Calcular la solución general de la ecuación homogéna correspondiente. Así, la solución general de la ecuación va poder se escribir como la suma de la solución particular y de la solución de la ecuación homogena.

d. Calcular la solución completa en el caso de $f(t) = E\omega \sin \omega t$ si $t \geq 0$ y 0 si $t \leq 0$. (!! $f(t)$ no es un funcion de cuadrado integrable ($\int_0^\infty |f(t)|^2 \, dt \to \infty$). Entonces, ustedes necesitan regularizar $f(t)$ multiplicandolo, por ejemplo, por $e^{-\epsilon t}$ y despues pasar por el limite $\epsilon \to 0$)

14. ***Hallar las soluciones generales*** $u(x,y)$ ***de las ecuaciones diferenciales siguientes:***

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 0 && (14.27)\\ u_x - u_y &= 0 && (14.28)\\ u_{xy} &= 0 && (14.29)\\ u_{xx} - u_{yy} &= 0 && (14.30)\\ x\ u_x - y\ u_y &= 0 && (14.31)\\ x\ u_x + y\ u_y &= nu && (14.32) \end{aligned}$$

15. ***Clasificar las ecuaciones siguientes:***

$$\begin{aligned} 4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y &= 2 && (14.33)\\ u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} &= e^y && (14.34)\\ u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x &= 0 && (14.35)\\ 3u_{xx} + 4u_{xy} - u_{yy} &= e^{3x^2} && (14.36)\\ u_{xx} - 2uxy + u_{yy} + u &= x^2 && (14.37)\\ 4u_{xx} + u_{yy} + 5xy &= 0 && (14.38)\\ u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} &= e^{3x^2} + 2xyu && (14.39)\\ u_{yy} &= -2u_{xx} + 3xyu^2 && (14.40) \end{aligned}$$

16. ***Resolver la ecuación de la cuerda vibrante de longitud*** l ***fija a los dos extremidades con las condiciones initiales siguientes***:

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \begin{cases} x & (0 \le x \le l/2)\\ l-x & (l/2 \le x \le l) \end{cases} && (14.41)\\ \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} &= 0 && (14.42) \end{aligned}$$

17. ***Resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones en los 3 casos siguientes:***

    (a) en un cuadrado: $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$ con condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} w(0,y) &= w(1,y) = 0 && (14.43)\\ w(x,1) &= 0 && (14.44)\\ w(x,0) &= \begin{cases} x & (0 \le x \le 1/2)\\ (1-x) & (1/2 \le x \le 1) \end{cases} && (14.45) \end{aligned}$$

(b) en un anillo: $r_1^2 \le x^2 + y^2 \le r_2^2$ con condiciones a la frontera:

$$\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=r_1} = 1 \quad (14.46)$$
$$w|_{r=r_2} = 0 \quad (14.47)$$

(c) en el mismo anillo pero con otras condiciones a la frontera:

$$\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=r_1} = B\cos\theta \quad (14.48)$$
$$w|_{r=r_2} = Ar_2\cos\theta \quad (14.49)$$

18. ***Resolver la ecuación de calor para una barra infinita con distribución initial:***

$$f(x) = e^{-a^2x^2/2} \quad (14.50)$$

19. ***Resolver la ecuación de calor para una barra de longitud unidad*** $0 \le x \le 1$ ***y*** $t > 0$ ***con condiciones initiales:***

$$w(x,0) = \begin{cases} x & (0 \le x \le l/2) \\ l - x & (l/2 \le x \le l) \end{cases} \quad (14.51)$$

Tratar los dos casos siguientes:

(a) condiciones a la frontera homogenes: $w(0,t) = w(1,t) = 0$.

(b) condiciones a la frontera no-homogenes:

$$w(0,t) = T_0 \quad (14.52)$$
$$w(1,t) = T_1 \quad (14.53)$$

20. ***Sea una esfera de radio*** a ***que se mueve a velocidad constante*** $\vec{v}$ ***en un fluído ideal, es decir que el fluído es no-viscoso, incompresible e irrotacional.***

(a) provar que $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$ y que ϕ satisface el ecuación de Laplace (indicio: usar ecuación de continuidad y teorema de la divergencia).

(b) resolver la ecuación de Laplace y calcular la distribución de velociad del fluído. Las condiciones a la frontera son determinadas por la fisica del problema.

21. ***Resolver la ecuación del oscillator armónica a dos dimensiones:***

$$H\Psi = \frac{1}{2}\left(-\partial_x^2 - \partial_y^2 + x^2 + y^2\right)\Psi = E\Psi \quad (14.54)$$

Sabiendo que las soluciones sobre $L^2(R, dx)$ de la ecuación siguiente son las funciones de Hermite normalizadas $\phi_n(x)$:

$$\frac{1}{2}\left(-d_x^2 + x^2\right)\phi_n(x) = (n + \frac{1}{2})\phi_n(x) \tag{14.55}$$

(a) usar el método de separación de variables.

(b) cuales son las valores $\{E_n | n \in N\}$ permitida para E?

(c) calcular la degeneración para cada valor de E, es decir el número de soluciones independientes para cada valor de E_n.

22. ***Usando de nuevo las propiedades de las funciones de Hermite (ver ejercicio precedente), hallar la única solución de la ecuación siguiente:***

$$\frac{1}{2}\left(-\partial_x^2 + x^2 - 1\right)u = -\partial_t u \tag{14.56}$$

$$u(x, 0) = \phi_0(x) + 4\phi_2(x) \tag{14.57}$$

tal que $u(x,t) \in L^2(R, dx)$ para todo tiempo t.

23. ***Hallar la única solución regular de $\triangle f =$ en una esfera de radio L y verificando la condicion a la frontera:***

$$f(r = L, \theta, \phi) = \cos^2\theta \tag{14.58}$$

(a) usar el método de separación de variable en el sistema de coordenadas adequadas y poner la constante igual a $l(l+1)$.

(b) Poner la parte radial $R(r) = \sum_{j \in Z} a_j r^j$ y determinar para cual valor de j, $R(r)$ satisface la ecuación de Laplace (por la parte radial) y es también una función regular.

(c) Usando el hecho que las soluciones de la parte angular del laplaciano:

$$\Theta_3 Y(\theta, \phi) = -l(l+1)Y(\theta, \phi) \tag{14.59}$$

son las armónicas esféricas : $Y(\theta, \phi) \equiv Y_l^m(\theta, \phi)$ con $-l \leq m \leq l$ (solamente las armónicas esféricas con $m = 0$ no depende de la variable angular ϕ).Y sabiendo que

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{14.60}$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \tag{14.61}$$

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \tag{14.62}$$

determinar la solución única que satisface la condición a la frontera dada.

24. ***Resolver ecuación siguiente:***

$$u_{tt} = u_{xx} + a \tag{14.63}$$

$0 < x < 1, t > 0$. Con condiciones a la frontera y datos de Cauchy iguales a

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0 & (14.64)\\ u(x,0) &= mx(1-x) & (14.65)\\ u_t(x,0) &= 0 & (14.66) \end{aligned}$$

25. ***Resolver***

$$u_t = u_{xx} + 2x \tag{14.67}$$

con $0 < x < 1$, $t > 0$ y con condiciones a la frontera y iniciale:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 & (14.68)\\ u(1,t) &= 0 & (14.69)\\ u(x,0) &= x - x^2 & (14.70) \end{aligned}$$

26. ***Probar que todo espacio prehilbertiano ($\mathcal{E}, < .|. >$) es un espacio vectorial normado por la norma definida por***

$$||x|| = \sqrt{< x|x >} \tag{14.71}$$

Usar por la demostación la desigualdad de Schwarz:

$$| < x|y > | \leq ||x||.||y|| \tag{14.72}$$

27. ***Probar que toda norma que deriva de un producto escalar verifica la igualdad del paralelogramo:***

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \tag{14.73}$$

Encontrando una norma que no verifica esta igualdad, probar que existe norma que no derivan de un producto escalar.

28. ***Para*** $p \geq 1$***, definimos*** $L^p(R, dx)$ ***como espacio de las clases de equivalencia de funciones*** f ***de una variable real satisfaciendo la condición:***

$$\int dx |f(x)|^p < \infty \tag{14.74}$$

Para tales funciones, la norma es

$$||f||_p \equiv \left[\int dx |f(x)|^p \right]^{1/p} \tag{14.75}$$

Hallar las valores de** p **por cuales** $||.||_p$ **deriva de un producto escalar.

Usar por eso, la idendidad del paralelogramo por las funciones características de los intérvalos $[0,1]$ y $[1,2]$. Para las valores de p así encontrada, verifica que las normas correspondientes derivan efectivamente de producto escalares dando explícitamente la definición del producto escalar.

29. ***Sea** $\mathcal{E}$ **un espacio vectorial sobre** C**. Podemos dar a** $\mathcal{E}$ **una distancia (llamada "discreta") definiendo** $\forall x, y \in \mathcal{E}$**,***

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases} \tag{14.76}$$

Probar que es bien una distancia y que esta distancia no deriva de una norma si suponemos que** C **tiene la norma compleja usual.

30. ***Probar que el espacio** $\mathcal{E}$ **del ejercicio anterior es completo.***

31. ***Probar que** Q **no es completo (**$Q \equiv$ **conjunto de los números racionales).***

32. ***Probar que todo espacio vectorial** $\mathcal{E}$ **de dimensión finita sobre** R **(**C**) es un espacio de Hilbert.***

33. Seq $H = L^2([-1,1], dx)$, sea $f \in H$, definimos la parte par e impar de f como
$$f_\pm(x) = \frac{1}{2}\{f(x) \pm f(-x)\} \tag{14.77}$$
De la misma manera, consideramos los sub-espacios par e impar definido como
$$\begin{aligned} H_\pm &\equiv \{f_\pm | f \in H\} \\ &= \{f \in H | f(x) = \pm f(-x)\} \\ &= \{f \in H | f_\mp = 0\} \end{aligned} \tag{14.78}$$
Probar que
$$H_\pm^\perp = H_\mp \tag{14.79}$$
Deducir de eso que** H_+ **y** H_- **son sub-espacios de Hilbert de** H **y que** H **puede escribirse como suma directa de esos 2 espacios:
$$H = H_+ \otimes H_- \tag{14.80}$$

34. ***Probar usando la ortogonalidad de los** P_l **que***
$$\int_{-1}^{1} dx\ p(x)\ P_l(x) = 0 \tag{14.81}$$
si $p(x)$ es un polinomio de grado estrictamente inferior a l.

35. ***Probar que***

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x) \tag{14.82}$$

Por eso, usando el resultado anterior, probar que primero que $P_l(-x) = \alpha_l P_l(x)$. Hallar despues que $\alpha_l^2 = 1$ y deducir que $\alpha_l = (-1)^l$.

36. ***Probar que***

$$d_x^j (x-a)^n|_{x=a} = n!\delta_{nj} \tag{14.83}$$

37. ***Probar que los polinomios de Legendre P_l definido por la fórmula de Rodrigues***

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} d_x^l (x^2-1)^l \tag{14.84}$$

verifican la ecuación de Legendre y la condición de normalización.

$$P_l(1) = 1 \tag{14.85}$$

38. ***Probar usando la fórmula de Rodrigues, que los polinomios de Legendre verifican la condición de normalización***

$$< P_l|P_l >= \frac{2}{2l+1} \tag{14.86}$$

39. ***Hallar P_3 usando la ortogonalidad, la simetría y la normalización de los polinomios de Legendre***

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 && (14.87)\\ P_1(x) &= 2 && (14.88)\\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) && (14.89) \end{aligned}$$

40. ***Hallar el coeficiente de x^{16} en el polinomio de Legendre $P_{25}(x)$.***

41. ***Hallar la serie de Legendre de la función:***

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } \alpha \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{14.90}$$

donde $-1 < \alpha < 1$. Usar la fórmula de recurrencias sabiendo que

$$f(x) \equiv \sum_l c_l P_l(x) \tag{14.91}$$

con

$$\begin{aligned} c_l &\equiv \frac{< P_l|f >}{||P_l||^2} && (14.92)\\ &= (l+\frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} dx\ f(x)\ P_l(x) && (14.93) \end{aligned}$$

42. ***Hallar la serie de polinomios de Legendre de la función*** $f(x) = x^2$***.***

43. ***Probar, usando la función de generación, que***

$$
\begin{aligned}
P_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{(2n-1)!}{n!2^n} && (14.94)\\
P_{2n+1}(0) &= 0 && (14.95)
\end{aligned}
$$

44. ***las funciones de Hermite son definidas como soluciones de la ecuación***

$$(-d_x^2 + x^2)f = f \tag{14.96}$$

Como es una ecuación diferencial de segundo grado, existe una segunda solución independiente. Hallar, usando el método de Wronsky, esta segunda solución y probar que es igual a

$$g(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x dt e^{t^2} \tag{14.97}$$

Verificar que la función $g(x)$ no es un elemento de $L^2(R, dx)$.

45. ***Probar que las funciones de Hermite*** f_n ***son funciones propias de la transformación de Fourier, definida por***

$$\widehat{f}(k) \equiv \mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x) \tag{14.98}$$

Más precisamente, demostrar la relación:

$$\mathcal{F}(f_n) = (-i)^n f_n \tag{14.99}$$

Por eso, se mostrará por cálculo directo para f_0 y después proceder por recurrencia para las otras funciones de Hermite.

46. ***Probar, usado la función de generación que los polinomios de Hermite son de paridad bien definida:***

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \tag{14.100}$$

47. ***Obtener, usando la función de generación y la serie de Taylor de*** e^u***:***

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \tag{14.101}$$

la expresión:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \tag{14.102}$$

48. ***Probar que***

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \quad \text{y} \quad H_{2n+1}(0) = 0 \tag{14.103}$$

49. ***Usando la función generadora, deducir la fórmula de adicción para los polinomios de Hermite:***

$$H_n(x+y) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} H_k(\sqrt{2}x) H_{n-k}(\sqrt{2}y) \tag{14.104}$$

50. ***Obtener las relaciones de recurrencia (11.69) y (11.70) usando la función de generación.***

51. ***Hallar la serie en polinomios de Hermite de la función siguiente***

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{14.105}$$

usando la propiedad de $H_n(x)$ siguiente:

$$e^{-x^2} H_n(x) = -\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} H_{n-1}(x)\right) \tag{14.106}$$

52. ***Sea*** $\rho(x)$ ***una función de peso sobre*** $[-1, 1]$ ***y sea*** $\{p_n(x)\}_{n \in N}$ ***el sistema ortogonal de polinomios correspondiente.***

$$\int_{-1}^{1} \rho(x) p_m(x) p_n(x) = c_n \delta_{mn} \tag{14.107}$$

Probar que si

$$\rho(-x) = \rho(x) \tag{14.108}$$

entonces, tenemos

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x) \tag{14.109}$$

53. ***Los polinomios de Tchebychev*** $T_n(x)$ ***para*** $n = 0, 1, 2, ...$ ***son polinomios ortogonales en relación a la función de peso*** $\rho(x) = (1 - x^2)^{1/2}$***, y verifican la relación de ortogonalidad:***

$$< T_n | T_m > = \int_{-1}^{1} dx (1-x^2)^{1/2} T_n(x) T_m(x) = c_n \delta_{mn} \tag{14.110}$$

para cualquier $m, n \in N$. La manera convencional de normalizar esos polinomios es de imponer

$$T_n(1) = 1 \tag{14.111}$$

Usando esas dos condiciones y el resultado anterior, hallar los 5 primeros polinomios de Tchebychev $T_0.T_1, T_2, T_3$ ***y*** T_4***.*** Por eso, vamos a necesitar la integral definida siguiente:

$$\int_0^1 dx x^{\alpha}(1-x)^{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \tag{14.112}$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma de Euler y tiene como propiedades:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n! && (14.113)\\
\Gamma(1) &= \Gamma(2) = 1 && (14.114)\\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} && (14.115)\\
\Gamma(n+1/2) &= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} && (14.116)\\
(2n-1)!! &\equiv 1.3.5....(2n-1) && (14.117)
\end{aligned}$$

54. ***Los polinomios de Jacobi*** $P_n^{(\alpha,\beta)}$ ***son definido por la fórmula de Rodrigues:***

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{\beta+n}\right) \tag{14.118}$$

con $\alpha > -1$ y $\beta > -1$, $n = 0, 1, 2, ...$ Probar que los polinomios de Jacobi verifican los propiedades siguientes:

(a) $P_n^{(\alpha,\beta)}$ satisfacen la ecuación diferencial siguiente:

$$(1-x^2)u^{''} + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)\, u^{'} + n(n+\alpha+\beta+1)u = 0$$

(b) los polinomios $P_n^{(\alpha,\beta)}$ son ortogonales con peso

$$\rho(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \tag{14.119}$$

sobre el intérvalo $[-1, 1]$.

(c) la función de generación de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ es

$$w(x,t) = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-t+R)^{-\alpha}(1+t+R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n \tag{14.120}$$

donde $R = (1 - 2xt + t^2)^{1/2}$.

Capitulo 15

Bibliografia

En esta sección vamos a dar varias referencias bibliográficas. Claramente, un libro puede ser incluído en varias categorias. Esta bibliográfia no tiene la ambición de ser exhaustiva y el objectivo de estas listas es de ayudar y de guiar a los estudiantes a buscar informaciones sobre el temario de este curso y poder profundizar sus conocimientos en el campo de la resolución de ecuaciones diferenciales parciales de la Física.

Sobre las ecuaciones diferenciales parciales lineales en general y métodos de resolución:

1. A. Sommerfeld, "Partial differencial equations in Physics", Academic Press (1949).

2. notas del curso PHYS1140 "Physique théorique et mathématique", de Prof. J.P. Antoine, J. Weyers y J. Pestieau (frances), Universite de Louvain, Belgica (frances).

3. G. Stephenson, "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales", editorial reverte,s.a. (1982).

4. M. R. Spiegel, "Transformadas de Laplace", McGraw-Hill, Schaum (1998).

5. D. Zwillinger, "Handbook of differential equations", 2nd editions,Academic Pres, inc. (1992).

Sobre las series de Fourier y transformada de Fourier, cualquier libro que trata del tema es recomendable pero quiero atraer la atención de los lectores sobre el hecho de que existe en la literatura varias definición de los coeficientes de Fourier y de la transformada de Fourier. Escogimos en este notas la definición la más simétrica para la transformada de Fourier y decidimos de introducir los coeficientes Fourier usando una base ortonormal del espacio de Hilbert $L^2([-l,l],dx)$. En muchos libros particularmente libros para ingenieros, los coeficientes de Fourier son nada más que los coeficientes que multiplican las funciones senos y cosenos en la serie de Fourier. Claramente, esta diferencia en la definición va a traducirse en las propiedades de las series de Fourier. Así en los aplicaciones de las series de Fourier y de sus propiedades, el lector si usa otras referencias debería siempre verificar que aplica la propiedad adecuada a la definición que usa.

Sobre el espacio de Hilbert y operadores diferenciales:

1. S.K. Berberian, "Introduction to Hilbert Space", Oxford Univ. Press, Oxford, 1961.
2. R.D. Richtmyer, "Principles of Advanced Mathematical Physics I", Springer-verlag, Berlin, 1980.

Sobre los polinomios ortogonales:

1. N. Vilenkine, "Fonctions speciales et theorie de la representation des groupes", Dunod, Paris 1969.
2. notas del curso PHYS2121 de Prof. J.P. Antoine, Universite de Louvain, Belgica (frances).
3. M.N. Lebedev, "Special functions and their applications", Dover Publications,INC, New-York (1972).

Sobre cálculo y análisis:

1. R. Courant, F. John, "Introduction to calculus and analysis", Volume II, Springer (1989).
2. J. Mawhin, "Analyse- Fondements, techniques, evolution", 2nd editions, De Boeck-Universite, 1997.