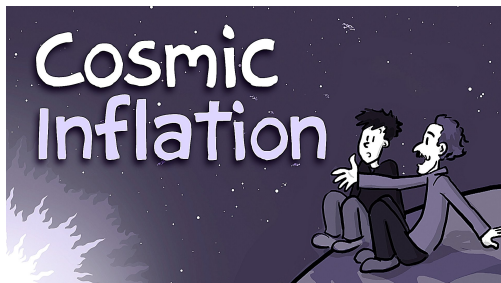


# Efectos cuánticos en el universo temprano

**Alberto Diez-Tejedor**

Departamento de Física  
Universidad de Guanajuato



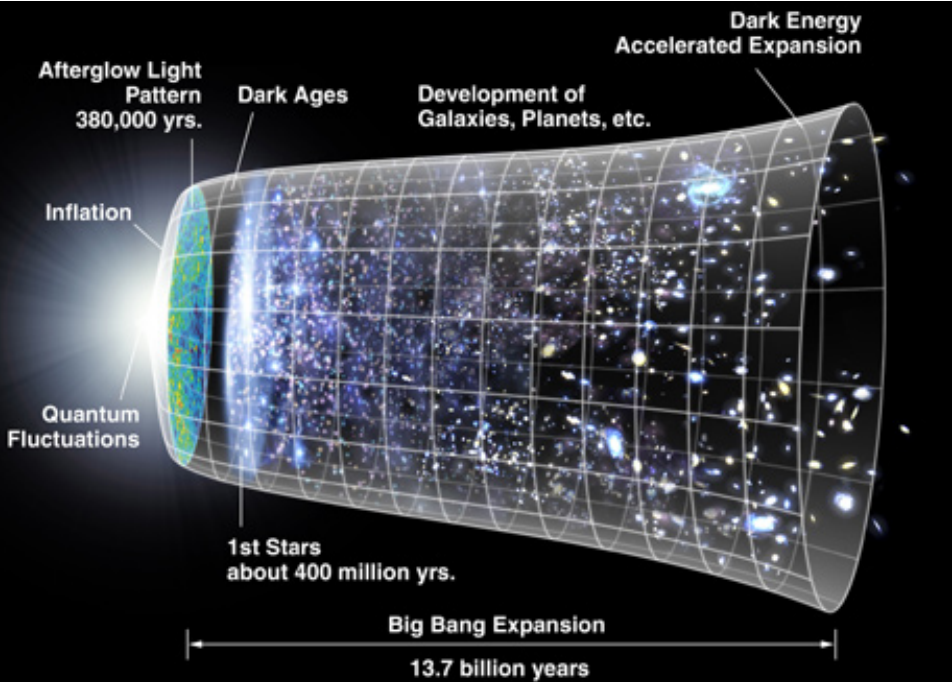
León, Guanajuato, a 7 de agosto del 2015

The background of the slide is a Cosmic Microwave Background (CMB) fluctuation map. It shows a complex, grainy pattern of colors representing temperature variations in the early universe. The colors range from dark blue (cooler) to yellow and red (warmer). The pattern is isotropic and statistically homogeneous, with no discernible large-scale structure.

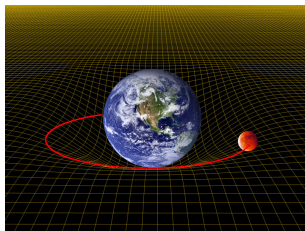
Hoy hablaremos de GRAVEDAD y CUÁNTICA

¡¡No de GRAVEDAD CUÁNTICA!!  
(aunque pudiera darnos pistas)

**Toda historia tiene un comienzo...**

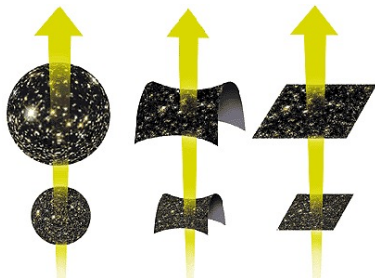


# Relatividad General



*“La materia le dice al espacio-tiempo cómo ha de curvarse; el espacio-tiempo le dice a la materia cómo ha de moverse”*

# Relatividad General: Cosmología



$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

$$k = +1, \quad k = -1, \quad k = 0$$

El **factor de escalar**  $a(t)$  mide la “separación entre galaxias”  
**Presión**  $p$  y **densidad**  $\rho$  las propiedades de la materia

	I	II	III	
Quarks	$u$	$c$	$t$	$\gamma$
	$d$	$s$	$b$	$g$
Leptons	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	$Z$
	$e$	$\mu$	$\tau$	$W$

Three Generations of Matter

Para propósitos prácticos:

- **Radiación:**  $p = \rho/3$
- **Polvo:**  $p = 0, \rho \neq 0$

# “Problemas” del modelo cosmológico clásico



$$\begin{aligned}\rho(t) &\sim 1/a^4 \\ p(t) &\sim 1/a^4 \\ a(t) &\sim t^{1/2}\end{aligned}$$

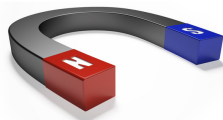
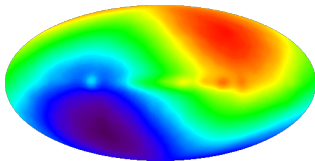
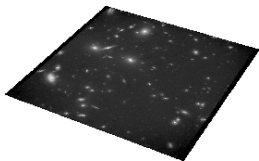


$$\begin{aligned}\rho(t) &\sim 1/a^3 \\ p(t) &\sim 0 \\ a(t) &\sim t^{2/3}\end{aligned}$$

**Planitud:** ¿Por qué vivimos en un universo plano?

**Horizonte:** ¿Por qué vemos el universo igual en todas direcciones?

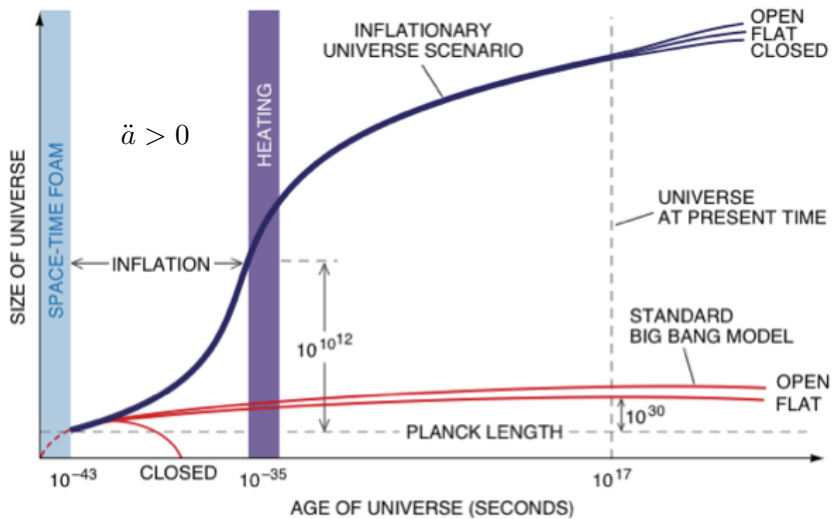
**Reliquias:** ¿Por qué nunca hemos detectado una partícula reliquia?



Estos problemas pudieran resolverse para un universo **inflacionario**

$$\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \rho + 3p < 0$$

# Inflación a grandes rasgos



¡El universo es mucho más grande de lo que nos imaginábamos!



# Teoría Cuántica de Campos (QFT)

A nivel fundamental, describimos la materia por medio una **R-QFT**

## Recetario (en espacio plano): Campo Escalar Klein-Gordon

$$(\square - m^2)\phi = (-\partial_t^2 + \nabla^2 - m^2)\phi = 0$$

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\delta(\vec{x}-\vec{y}), [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{y})] = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = 0$$

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \sum_{\vec{k}} \left( \hat{a}_{\vec{k}} e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right)$$

$$\text{Fock space: } |^1n_{\vec{k}_1}, ^2n_{\vec{k}_2}, \dots, ^jn_{\vec{k}_j}\rangle = \frac{(\hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger)^{1n} (\hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger)^{2n} \dots (\hat{a}_{\vec{k}_j}^\dagger)^{jn}}{\sqrt{1n!2n! \dots jn!}} |0\rangle$$

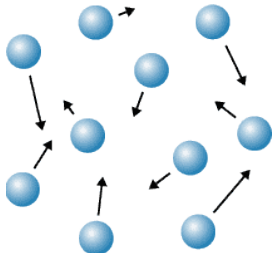


Los constituyentes “fundamentales” de la Naturaleza NO están descritos en términos de partículas, sino de **campos**. En particular en términos de una **teoría cuántica de campos relativista** (R-QFT)

# Fuente para la gravedad

Descripción **clásica** gravedad,  $g_{\mu\nu}(t, \vec{x})$ , **cuántica** materia,  $\hat{\phi}(t, \vec{x})$

$$\text{Gravedad semiclásica: } G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$$

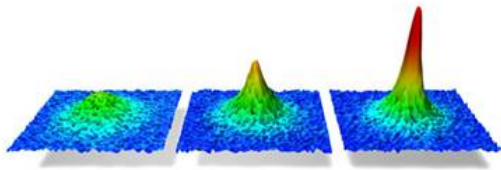


**Componente en eq. termodinámico**

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle_{\beta} &= \frac{\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{Q})} \hat{T}_{\mu\nu}(x)]}{\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{Q})}]} \\ &= \text{diag}[\rho, p, p, p] \end{aligned}$$

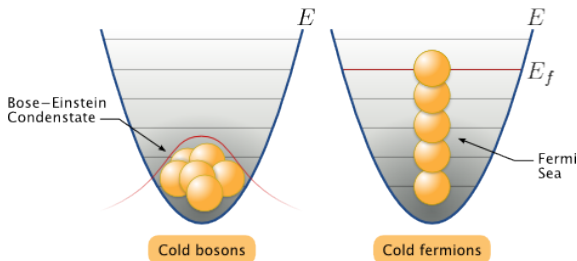
$$T \gg m \Rightarrow \rho \sim T^4, \quad p = \rho/3 \quad (\text{radiation})$$

$$T \ll m \Rightarrow \rho \sim nm, \quad p \sim nT \ll \rho \quad (\text{dust})$$



**“CONDENSADO”**

# Condensado $\sim$ Estado coherente puro en $\mathcal{H}$



**condensado:**  $|\psi\rangle = |\psi\rangle_0 \otimes \prod_{\vec{k}_i \neq 0} |0\rangle_{\vec{k}_i}$

en donde  $\hat{a}_0|\psi\rangle = e^{i\theta} \sqrt{N}|\psi\rangle$ ,  $\hat{a}_{\vec{k}_i \neq 0}|\psi\rangle = 0$

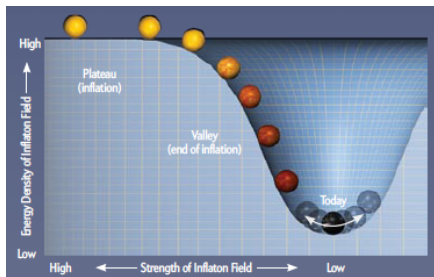
¿Cuántas **partículas** tenemos en el condensado?  $\langle \hat{N} \rangle = N$

¿Qué valor toma el **campo** condensado?  $\langle \hat{\phi} \rangle = \phi_{\text{class}}(t, \vec{x})$

¿Y el tensor de **energía-momento**?

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle = T_{\mu\nu}^{\text{class}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^2)$$

# El condensado a las escalas cosmológicas



$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

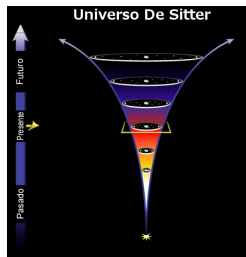
$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$

**Slow-Roll Inflation**  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \Rightarrow p \approx -\rho$

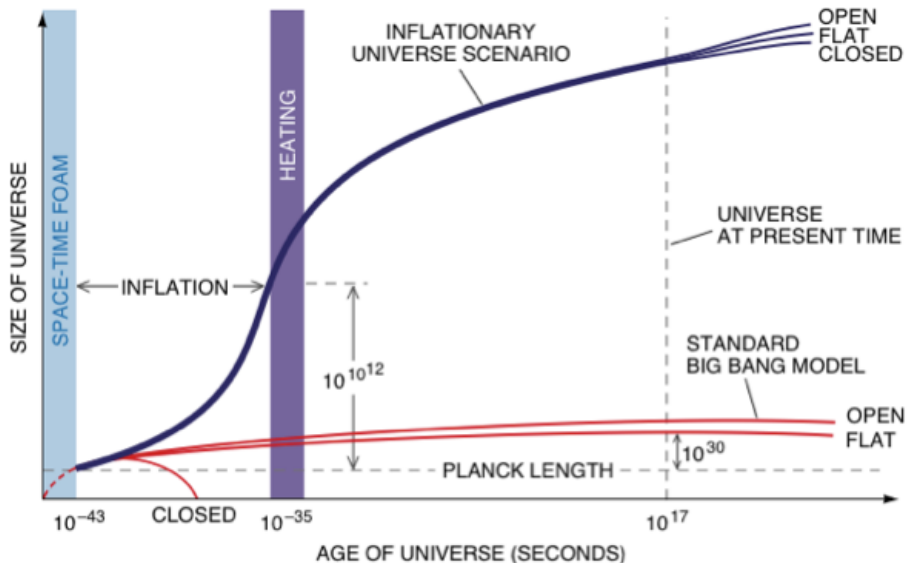
$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) \approx \dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho(t) \approx \text{const.}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \approx H_0^2 \Rightarrow a(t) \approx \exp(H_0 t)$$

$$ds^2 \approx -dt^2 + \exp(2H_0 t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

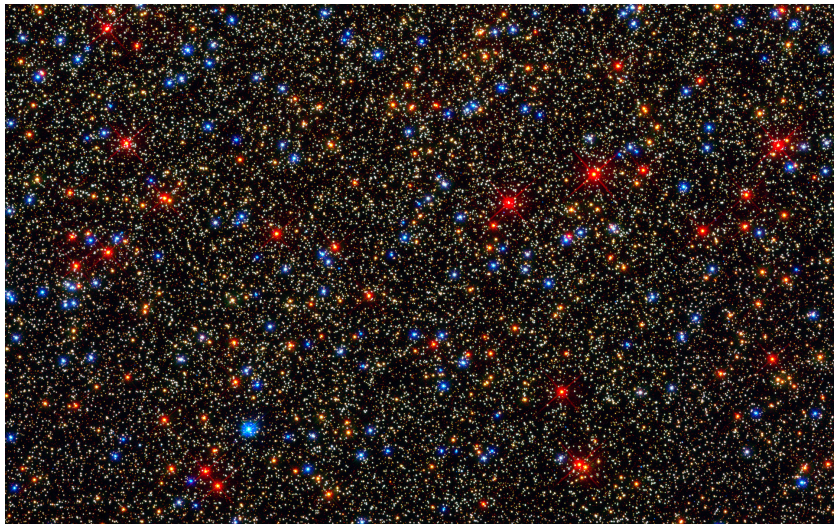


# De nuevo la imagen pictórica

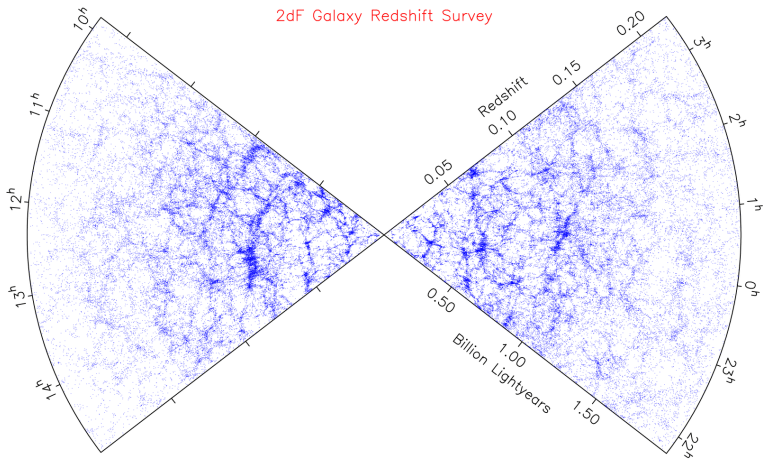


# Foto del universo “hoy” ( $t \sim 10^{10}$ años después BB)

Pero... ¡en realidad **el universo NO** es homogéneo e isótropo!

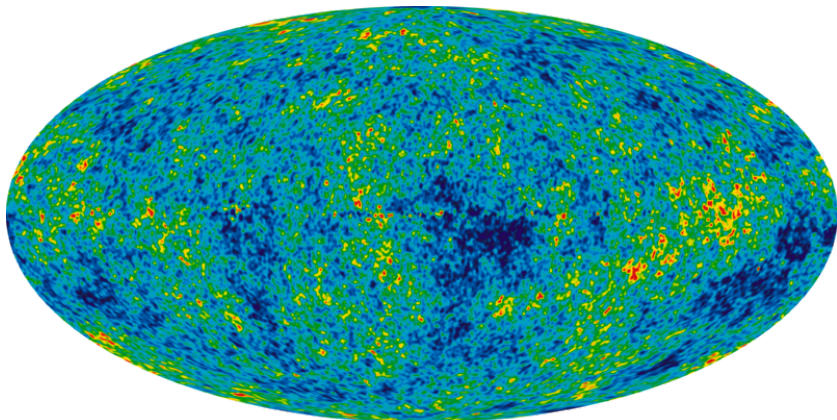


# “Foto” del universo “hoy” (distribución de galaxias)



La homogeneidad e isotropía sólo se da a gran escala,  $d \gtrsim 50$  Mpc

# “Foto” del universo al instante de la recombinación



$$f(t, \vec{x}) = f_0(t) + \delta f(t, \vec{x}), \text{ con } \delta f(t, \vec{x}) \ll 1, \text{ pero } \delta f(t, \vec{x}) \neq 0$$



# Teoría cuántica de campos en espacios curvos

Veamos cómo ha de formularse una **QFT** más allá de Minkowski

**“Nuevo”** recetario; otra vez **Campo Escalar Klein-Gordon**

$$(\square - m^2)\phi = (g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\phi = 0$$

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\delta(\vec{x}-\vec{y}), [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{y})] = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = 0$$

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \sum_i \left( \hat{a}_i u_i(t, \vec{x}) + \hat{a}_i^\dagger u_i^*(t, \vec{x}) \right)$$

$$(\square - m^2)u_i = 0; (u_i, u_j) = \delta_{ij}, (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, (u_i, u_j^*) = 0$$

$$(u_i, u_j) = -i \int_\Sigma [u_i(\partial_\mu u_j^*) - (\partial_\mu u_i)u_j^*] \sqrt{g_\Sigma} n^\mu d\Sigma$$

$$\text{Fock space: } |^1 n_{\vec{k}_1}, ^2 n_{\vec{k}_2}, \dots, ^j n_{\vec{k}_j}\rangle = \frac{(\hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger)^{1n} (\hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger)^{2n} \dots (\hat{a}_{\vec{k}_j}^\dagger)^{jn}}{\sqrt{1n! 2n! \dots jn!}} |0\rangle$$

Noten que en general el **estado de vacío** NO está bien definido

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i u_i + \hat{a}_i^\dagger u_i^*) = \sum_i (\hat{a}_i \bar{u}_i + \hat{a}_i^\dagger \bar{u}_i^*), \text{ donde } |0\rangle \neq |\bar{0}\rangle$$

# Campo escalar (cuántico) en de Sitter

**Modo-cero** muy excitado  $\rightsquigarrow$  “clásico”  $\rightsquigarrow$  guía universo **de Sitter**

$$\text{de Sitter: } \begin{cases} \text{(TF)} a(t) = \exp[H_0 t], t \in (-\infty, \infty) \\ \text{(TC)} a(\eta) = -1/(H_0 \eta), \eta \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

El resto de modos  $\vec{k} \neq 0$  se encuentran en su **estado de vacío** (!)

$$|\psi\rangle = |\text{clásico}\rangle_0 \otimes \prod_{i \neq 0} |0\rangle_i, \quad \text{con respecto a que } u_i(x)?$$

**Simetrías del background (H&I):**  $u_{\vec{k}}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{f_{\vec{k}}(\eta)}{a} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$

$$f_{\vec{k}}'' + \left[ a^2 \left( m^2 - \frac{a''}{a^3} \right) + k^2 \right] f_{\vec{k}} = 0, \quad f_{\vec{k}} f_{\vec{k}}'^* - f_{\vec{k}}' f_{\vec{k}}^* = i$$

$$f_{\vec{k}}(\eta) = \alpha \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right) + \beta \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 + \frac{i}{k\eta} \right), \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$$

If  $k \gg aH$  then  $f_{\vec{k}}(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \Rightarrow f_{\vec{k}}^{\text{BD}}(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( 1 - \frac{i}{k\eta} \right)$

# Observables: Funciones de correlación

La comparación con observaciones se realizar a un nivel **estadístico**

**Función de correlación de un punto** (valor medio)

$$\langle \delta \hat{\phi}(\eta, \vec{x}) \rangle = \langle 0 | \sum_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}} u_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*) | 0 \rangle = 0$$

**Función de correlación de dos puntos** (espectro potencias)

$$\langle [\delta \hat{\phi}(\eta, \vec{x})]^2 \rangle = \langle 0 | \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} (\hat{a}_{\vec{k}} u_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*) (\hat{a}_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'} + \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger u_{\vec{k}'}^*) | 0 \rangle =$$

$$= \sum_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^*) = \int \Delta_{\delta\phi}^2 d \ln k \quad \text{con} \quad \Delta_{\delta\phi}^2(\eta, k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|f_{\vec{k}}^{\text{BD}}(\eta)|^2}{a^2}$$

Al final de inflación,  $\eta \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta_{\delta\phi}^2(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 = \text{const.}$

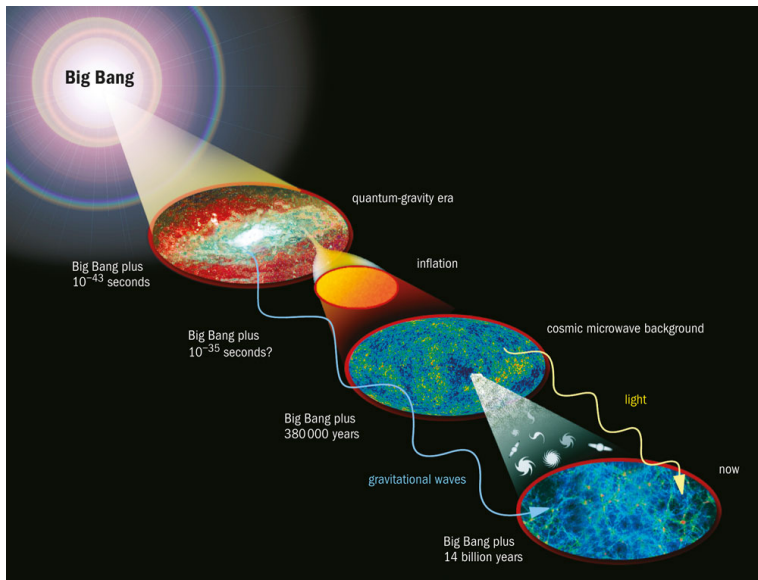
**Funciones de correlación de  $n$ -puntos**

Distribución Gaussiana  $\Rightarrow$   $n$ -puntos  $\sim$  F(2-puntos)

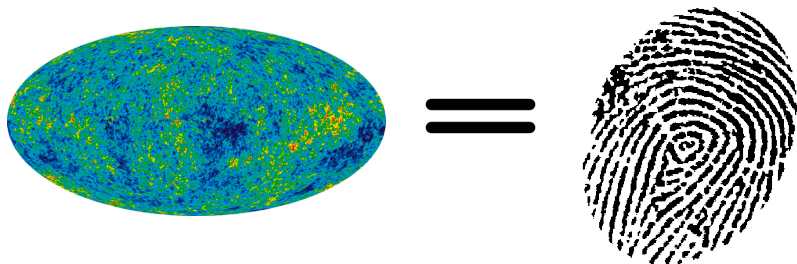
**Modelo más realista** (posibles temas a explorar)

- Efectos gravitatorios de las perturbaciones (gauge choice)
- Siguiendo orden en la expansión en serie (slow-roll expansion)
- Cómo pasar del campo a e.g.  $(\delta T/T_0)(\theta, \varphi)$ ,  $(\delta \rho/\rho_0)(\theta, \varphi)$

# Overview



# En pocas palabras...



Podemos ver al CMB como la huella de una época pasada  
en la que **GRAVEDAD** y **CUÁNTICA** fueron importantes  
simultáneamente

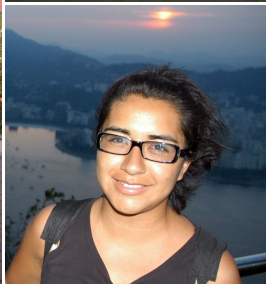
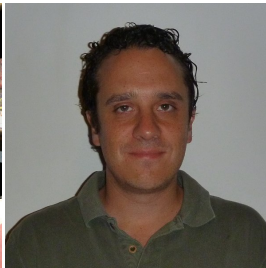
**¡SE ABRE UNA VENTANA PARA APRENDER COSAS NUEVAS!**

# COSMOLOGY MARCHES ON



# Posibilidades en el grupo

¿Te interesa la **cosmología** y quieres saber más al respecto?



# El otro día algunos miembros del departamento...







# Tarea (¡sólo para el estudiante interesado!)

- ¿En qué consisten exactamente los problemas de la **planitud** y del **horizonte**? ¿Podrían estimar el **número de e-folds** de inflación necesarios para solventar estos problemas?
- A partir del Lagrangiano de un campo escalar,  $\mathcal{L} \sim (\partial\phi)^2 + m^2\phi^2$ , obtener las expresiones  $\rho \sim \dot{\phi}^2 + m^2\phi^2$ ,  $p \sim \dot{\phi}^2 - m^2\phi^2$ , para la densidad de energía y presión en un fondo homogéneo e isótropo.
- ¿Qué son los **parámetros de slow-roll**? ¿Cómo estos parametrizan las **desviaciones con respecto a de Sitter**?
- ¿Cuál es la **variable de Mukhanov-Sasaki**? ¿Por qué es importante esta variable? ¿Con qué variable que nosotros hemos utilizado está relacionada? ¿Por qué sería más conveniente trabajar en términos de esta variable en vez de con la que nosotros usamos?
- Encontrar una **base completa de modos normales**  $u_{\vec{k}}(\eta, \vec{x})$  a primer orden en los parámetros de slow-roll.
- ¿Cómo se ve alterado el **espectro de potencias** a primer orden en los parámetros de slow-roll?

# Bibliografía

- E. Kolb and M. Turner, "*The early universe*," Westview Press (February 21, 1994)
- D. Baumann, "*The physics of inflation*," (internet)
- D. Baumann, "*Cosmology*," Part III Mathematical Tripos (internet)
- A. Liddle, "*An introduction to modern cosmology*," Wiley; 2 edition (May 16, 2003)
- A. Liddle, "*An introduction to cosmological inflation*," [astro-ph/9901124]
- S. Dodelson, "*Modern cosmology*," Academic Press; 1 edition (March 27, 2003)
- V. Mukhanov, "*Physical foundations of cosmology*," Cambridge University Press; 1 edition (December 5, 2005)
- A. Liddle and D. Lyth, "*Cosmological inflation and large-scale structure*," Cambridge University Press (April 13, 2000)