Estimado alumno:

En el presente envío encontrará Vd. una colección de problemas seleccionados, así como de comentarios, a modo de resumen, sobre algunos puntos contenidos en la materia correspondiente a la primera prueba personal. Los problemas abordan los puntos que nos parecen más importantes del temario de esta primera prueba, y su nivel de dificultad es el que nos parece el apropiado para esta asignatura de primer curso. Queremos hacer notar que entre los problemas se encuentran la mayor parte de los propuestos en las diferentes pruebas presenciales de la Asignatura realizadas durante los seis últimos cursos.

Queremos, también, aprovechar la ocasión para transmitirle algunas informaciones referentes a la planificación general de la asignatura. En primer lugar, debemos insistir en la necesidad de leer en detalle la Guía del Curso, donde se contiene abundante información de gran utilidad práctica. En particular se hallan en ella el Programa de la asignatura y una relación de libros recomendados para el estudio de la misma. Reiteramos una vez más que todos los datos acerca de estos puntos contenidos en la Guía del Curso son válidos para el curso en que nos hallamos. Sin embargo, tenemos alguna información adicional que pensamos puede ser de su interés, particularmente en lo referente a exámenes y prácticas de laboratorio:

1. **EXAMENES:** Debido al alto número de alumnos matriculados en la asignatura hemos decidido modificar el formato de las respuestas del examen, aunque no sus contenidos ni su nivel de dificultad. El formato anterior, con seis cuestiones de tipo test y dos problemas a desarrollar por el alumno, resultaba extremadamente lento de corregir y, dado el número de alumnos provocaba un retraso inaceptable en las fechas de comunicación de calificaciones, hecho que resultaba especialmente grave en las convocatorias de junio y septiembre. Por ello hemos cambiado el formato **de las respuestas** de los problemas que ahora serán también de tipo test. Dado que dicho formato podría penalizar excesivamente errores de importancia secundaria (operaciones, etc.) las preguntas correspondientes a los problemas se harán de forma que no sean simplemente llegar a un número o a una expresión final. Como ejemplos, se han añadido al presente envio tres problemas en el formato del examen. Resumiendo, el examen constará de:

    - **Tres cuestiones teóricas**, para las que se ofrecerán tres posibles respuestas de las que sólo una será válida.
    - **Un problema** que contendrá tres preguntas con tres posibles respuestas cada una, de las que sólo una será válida.
    - **Un problema** que contendrá cuatro preguntas con tres posibles respuestas cada una, de las que sólo una será válida.

    Las contestaciones correctas serán valoradas con un punto y **las incorrectas descontarán medio punto**. Finalmente algunas consideraciones acerca de la manera de realizar los exámenes de la asignatura. En primer lugar, es muy importante **leer con mucha atención las indicaciones que se dan en el encabezamiento del examen**, ya que suelen contener información acerca de datos importantes como la duración, el material utilizable, el número de problemas o preguntas que hay que contestar e, incluso, datos referentes a la puntuación atribuída a cada componente del examen.

2. **PRACTICAS DE LABORATORIO:** Un punto en que deseamos hacer especial énfasis durante el presente curso y siguientes es la realización de las prácticas de la asignatura. Repetimos una vez más que dicha realización es obligatoria: **no se puede aprobar la asignatura si no se han hecho las prácticas**. En la Guía del curso también hay un apartado dedicado a las formas en que ese requisito puede

ser cumplido. En cualquier caso el Departamento de Física Fundamental ofrece también, con carácter excepcional, algunas posibilidades no recogidas en la Guía, de manera que, a continuación, resumimos todas esas vías:

(a) En su propio Centro Asociado, si el Centro dispone de laboratorio. De manera que lo primero que debe hacer Vd. es ponerse en contacto con su Centro Asociado para verificar dicha posibilidad.

(b) En otro Centro Asociado o Centro de Enseñanza de su zona (Institutos, otros Centros Universitarios, etc.), bién sean organizadas colectivamente por su Centro Asociado o Tutor, bién de forma individual, pero siempre supervisadas por el Profesor Tutor de su Centro Asociado.

(c) En los Talleres intensivos de Laboratorio organizados en la Sede Central. Estos Talleres se realizan habitualmente durante los meses de Junio, Julio y Septiembre, y consisten en una estancia de una semana, con realización de prácticas de forma intensiva mañana y tarde. En general los gastos de desplazamiento y alojamiento (en Colegios Mayores Universitarios) son cubiertos por la Sede Central, aunque las disponibilidades de presupuesto obligan a un número limitado de plazas, de forma que se suelen reservar para aquéllos alumnos que no tienen ninguna otra manera de realizar las prácticas.

(d) Finalmente para aquéllos casos excepcionales de alumnos que ni siquiera puedan asistir a los Talleres por problema de fechas pero que si puedan venir a la Sede Central en otra época del año podemos establecer (avisando con antelación de al menos 15 días) unas prácticas específicas a realizar en la Sede Central (en este caso, en principio, no se podrían costear los gastos de estancia y desplazamiento).

En cualquier caso, es obligatoria la realización de un cuaderno de prácticas donde consten los informes detallados de las prácticas realizadas que debe ser entregado al profesor Tutor de su Centro Asociado para su evaluación.

Sin más que comunicarle por el momento y esperando que tenga el mejor aprovecha miento de este curso, se despide atentamente el Equipo Docente.

COMENTARIOS SOBRE ALGUNOS ASPECTOS DE LA DINAMICA

• Métodos de resolución de ecuaciones de Newton en una dimensión

Casos más usuales que se pueden presentar:

1. **Caso en que la fuerza depende solamente de la posición**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

En este caso, como en todos los que veremos más adelante, nos interesa reducir la ecuación de segundo orden a una ecuación de primer orden, más sencilla de resolver. Una vez hecho ésto podremos intentar el procedimiento más usual de separación de variables que nos permitirá una integración inmediata; en definitiva:

$$m\frac{dv}{dt} = F(x)dx.$$

Teniendo en cuenta que $dx/dt = v$, podemos reescribir la ecuación anterior

$$mvdv = F(x)dx.$$

Ahora integraciones sucesivas nos llevan a

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F(x)dx + C;$$

$$v = (\frac{2}{m})^{1/2}\big[\int F(x)dx + C_1\big]^{1/2};$$

que, con $dx/dt = v$ se transforma en:

$$t = \int \frac{dx}{(\frac{2}{m})^{1/2}\big[\int F(x)dx + C_1\big]^{1/2}} + C_2.$$

2. **Caso en que la fuerza depende solamente de la velocidad**

$$m\frac{dv}{dt} = F(v).$$

En este caso la ecuación está ya escrita en formato de ecuación de primer orden y la separación de variables es inmediata:

$$m\frac{dv}{F(v)} = dt \Rightarrow t = m\int \frac{dv}{F(v)} + C$$

3. **Caso en que la fuerza depende solamente del tiempo**

$$m\frac{dv}{dt} = F(t).$$

En éste caso la integración es inmediata:

$$m\int dv = \int F(t)dt + C_1.$$

Una segunda integración nos lleva a:

$$m\int dx = \int \big[\int F(t)dt + C_1\big]dt + C_2.$$

- **Discusión sobre el significado de la palabra "real"cuando la aplicamos a observables físicos. ¿Son las seudofuerzas "reales"? Si no es así, ¿por qué las experimentan observadores no inerciales ? ¿Por qué distintos observadores no están de acuerdo sobre su presencia o ausencia?**

Los físicos clasifican las fuerzas en "fuerzas reales"y "seudofuerzas". En el grupo de las fuerzas reales se incluyen aquéllas que surgen de las interacciones elementales (gravitatorias electromagnéticas, fuertes y débiles). También lo están las fuerzas generales de contacto tales como el rozamiento, las derivadas de la ley de Hooke y las que intervienen en la colisión de masas. Todos los observadores, independientemente del sistema de coordenadas que usan, están de acuerdo sobre la existencia, módulo y dirección de las fuerzas reales.

Las seudofuerzas surgen cuando el sistema de coordenadas utilizado está acelerado con respecto a un sistema de coordenadas inercial. Si solamente se utilizasen sistemas de coordenadas inerciales, las seudofuerzas no aparecerían. Sin embargo, muchos problemas son más fáciles de resolver en sistemas de referencia no inerciales.

Las seudofuerzas no son reales en el sentido de fuerzas existentes debido a alguna interacción entre dos cuerpos. Sin embargo, no hemos de dudar de la existencia de seudofuerzas en sistemas no inerciales. La clave para entender este punto está en: 1) el agente de la fuerza; 2) los puntos de vista que proporcionan distintos observadores. Como hemos dicho, las fuerzas reales son observables para cualquier observador en cualquier sistema de referencia y son debidas a interacciones. Su existencia no es debida a propiedades inerciales.

Por el contrario, las seudofuerzas solo son observables para observadores que acompañan un sistema acelerado y solamente surgen como reacción inercial a la aceleración del sistema de referencia. Surgen debido a la tendencia natural de una masa a continuar en su movimiento, tal como lo resume la Primera Ley de Newton. En ausencia de fuerzas reales el objeto sigue una línea recta para un observador en un sistema de referencia inercial. Sin embargo, debido al cambio del estado de movimiento del sistema de referencia acelerado, el objeto en cuestión aparece como cambiando su estado de movimiento para el observador fijo con respecto a dicho sistema acelerado. Pero en física, siempre que hay un cambio de estado de movimiento éste se toma como resultado de la existencia de alguna fuerza: la seudofuerza. El observador inercial ve el objeto moverse en línea recta con velocidad constante mientras que el observador acelerado lo ve cambiar su estado de movimiento, considerando que éste último es debido a la presencia de una fuerza.

- **Sabemos que en un sistema con fuerzas conservativas la energía total se conserva. ¿Qué pasa cuando las fuerzas no son conservativas? El siguiente ejemplo con un oscilador armónico amortiguado nos ilustra el caso**.

Supongamos una fuerza disipativa dependiente de la velocidad:

$$m\frac{dv}{dt} = -kx - \gamma v.$$

Multiplicamos por v ambos miembros de la expresión anterior,

$$v\left(\frac{dmv}{dt} + kx\right) = -\gamma v^2,$$

o bien, rescribiendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -\gamma v^2.$$

El término de la izquierda nos da la variación de la energía total con respecto al tiempo, y el término de la derecha nos dice que ésta es negativa. En consecuencia el sistema pierde energía mecánica, como era de esperar. En un nivel más avanzado se verá cómo cuando forzamos este oscilador la pérdida de energía queda compensada por el aporte exterior, pudiendo mantenerse el sistema en un régimen oscilatorio no amortiguado.

Problema 1.- Una cuerda está enrollada sobre un disco uniforme de radio R, y masa m. El disco se libera desde el reposo con la cuerda vertical sujeta a un techo por el extremo superior como se ve en la figura. Sean a la aceleración del centro de masas del disco (positiva haci arriba), T la tensión de la cuerda (positiva hacia arriba), α la aceleración angular (positiva en sentido antihorario) y h la distancia descendida por el centro de masas del disco.

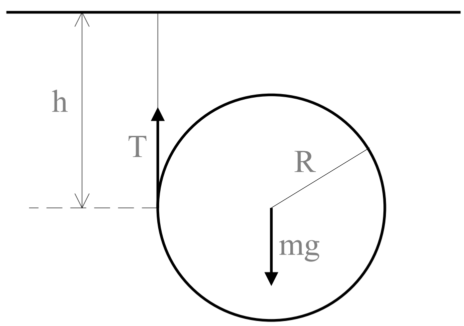

Figura 1: Figura

1. Tomando momentos en el eje, las ecuaciones escalares para la dinámica del disco son:
   (a) $ma = T - mg; \quad I\alpha = -TR.$
   (b) $ma = T - mg; \quad I\alpha = -TR.$
   (c) $ma = T - mgh; \quad m\alpha = -TR.$
2. Utilizando la relación entre a y α se obtiene:
   (a) $T = -\frac{1}{3}mg; \qquad a = -\frac{2}{3}g.$
   (b) $T = mgh(1 + R^2); \quad a = -gh(\frac{1+R^2}{R^2}).$
   (c) $T = \frac{1}{3}mg; \qquad a = -\frac{2}{3}g.$
3. La velocidad del centro de masa del disco, cuando éste haya descendido una altura h será:
   (a) $v = \sqrt{\frac{4}{3}mgh}.$
   (b) $v = \sqrt{\frac{4}{3}gR}.$
   (c) $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$

Problema 2.- Investigando el planeta Norc, situado en otro sistema solar, encontramos que su radio es R y que el periodo de un satélite en una órbita circular de radio r alrededor de Norc es T. Se nos pide a continuación que calculemos (a) la masa de Norc, (b) el valor del campo gravitatorio en la superficie de Norc, (c) suponiendo que el planeta tiene una densidad constante (es homogéneo), calcular la profundidad a que debe introducirse un cuerpo para que su peso sea el mismo que a una altura h sobre la superficie del planeta y, por último, (d) la aplicación numérica para $h = 200\ Km$.

4. Podemos calcular la masa del planeta Norc:
   (a) Por la segunda ley de Newton se igualan la fuerza de atracción gravitatoria con la fuerza centrífuga, obteniéndose la masa del planeta independientemente del periodo.
   (b) Por la segunda ley de Newton se igualan la fuerza de atracción gravitatoria con la fuerza centrífuga, obteniéndose la masa del planeta dependiente del periodo, que se sustituye por la ecuación $T = \frac{2\pi r}{v}$
   (c) Por la segunda ley de Newton se igualan la fuerza de atracción gravitatoria con la fuerza centrípeta, obteniéndose la masa del planeta dependiente del periodo, que se sustituye por la ecuación $T = \frac{2\pi r}{v}$
5. Calculamos, a continuación, el valor del campo gravitatorio en la superficie de Norc,
   (a) Por la segunda ley de Newton, se iguala la fuerza de atracción gravitatoria (GMm/r^2) al peso Mg del satélite.
   (b) Por la segunda ley de Newton, se iguala la fuerza de atracción gravitatoria (GMm/R^2) al peso Mg del planeta.
   (c) Por la segunda ley de Newton, se iguala la fuerza de atracción gravitatoria (GMm/R^2) al peso mg de una masa cualquiera.
6. Suponiendo que el planeta tiene una densidad constante (es homogéneo), para calcular la profundidad a la que debe introducirse un cuerpo para que su peso sea el mismo que a una altura h sobre la superficie del planeta hacemos:
   (a) Igualamos $\frac{GMm}{(R+h)^2}$ a $\frac{GMm}{(R-h')^2}$, y resolvemos la ecuación $h'^2 - 2h'R - h^2 - 2Rh = 0$, con h la altura sobre la superficie de Norc y h' bajo la misma superficie.
   (b) Igualamos las fuerzas de atracción gravitatoria , a la altura h con la correspondiente a una profundidad h' teniendo en cuenta que el peso disminuye proporcionalmente con el cuadrado de la altura por debajo de la superficie del planeta, obteniéndose la siguiente expresión para la altura h': $h' = R - \frac{R^2}{(R+h)^2}$
   (c) Igualamos las fuerzas de atracción gravitatoria, a la altura h con la correspondiente a una profundidad h' teniendo en cuenta que el peso disminuye proporcionalmente con la altura por debajo de la superficie del planeta, obteniéndose la siguiente expresión para la altura h': $h' = R - \frac{R^3}{(R+h)^2}$
7. Por último, para una altura de 200 Km., tenemos como resultados:
   (a) Una profundidad de 2,73 Km.
   (b) Una profundidad de 3,21 Km.
   (c) Ninguna de las respuestas anteriores

Problema 3.- Se empuja un bloque de masa $m = 0.5kg$ contra un resorte horizontal de masa despreciable, comprimiendo el resorte una distancia Δx (véase figura). La constante del resorte es $450N/m$. Cuando se suelta el bloque viaja a lo largo de una superficie horizontal y sin fricción hasta el punto B, en el que empieza a moverse hacia arriba por la parte interior de un carril circular vertical de radio $R = 1m$. La velocidad del bloque en la parte inferior del carril es $v_B = 12m/s$, y el bloque experimenta una fuerza de rozamiento mientras se desliza a lo largo del carril circular, que podemos considerar constante, y que es de $7N$. Se pide:

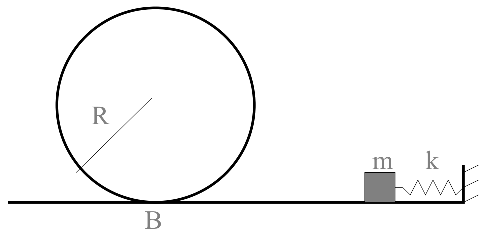

Figura 2: Figura

8. ¿Cómo se calcula la compresión inicial del resorte?
   (a) Igualando la energía potencial elástica del muelle con la energía cinética en B.
   (b) Por conservación del momento, el momento inicial de la masa será igual al momento en el punto más alto.
   (c) Igualando la fuerza elástica con el peso menos la fuerza centrífuga en B.

9. ¿Cómo se calcula la velocidad del bloque en el punto más alto del carril circular?
   (a) No vale la conservación de la energía porque hay fuerzas de rozamiento. Debe hacerse por conservación del momento.
   (b) La suma de la energía cinética en B más la energía elástica del muelle comprimido debe igualar a la suma de la energía potencial y cinética en el punto más alto.
   (c) La suma de la energía cinética en B más el trabajo realizado por la fuerza de fricción debe ser igual a la energía potencial más la cinética en el punto más alto.

10. El bloque alcanzará el punto más alto del carril
    (a) siempre que la energía elástica del muelle comprimido sea mayor que la energía gravitatoria en el punto más alto.
    (b) siempre que la fuerza centrífuga en el punto más alto supere al peso.
    (c) si la energía potencial en el punto más alto es más pequeña que el trabajo realizado debido a las fuerzas de rozamiento.

11. ¿Qué velocidad tiene el bloque en el punto más alto?
    (a) $4m/s$
    (b) $3.1m/s$
    (c) $5m/s$

PROBLEMAS

I. Sistemas de referencia y Ecuaciones de Newton

1. Una persona sostiene, colgando de su mano, un objeto en un ascensor con una aceleración $\vec{a}$ (positiva en el movimiento de subida). ¿Como describiría Vd. el movimiento del objeto?

Solución: Aquí distinguimos claramente entre dos sistemas de referencia. Uno (S), inercial, fijo con respecto al suelo; el otro (A), no inercial, acompañando al ascensor. Ambos tendrán, como veremos, dos puntos de vista distintos.

Para el observador S el objeto, la persona que lo sostiene y el ascensor, se mueven y están acelerados, y la fuerza neta de interacción, $F - mg$ (fuerza de contacto, ejercida por el ascensor, y gravedad), debe ser igual a la tasa de variación de la cantidad de movimiento, ma.

$$F - mg = ma.$$

Si a es positiva (ascensor subiendo) la fuerza de contacto sobre el objeto es simplemente mayor que el peso de éste y, al contrario, cuando a¡0, la fuerza de contacto es menor, pudiendo llegar a ser nula, $a = -g$, en cuyo caso tenemos una caida libre del objeto.

Para un observador acompañando al ascensor (digamos la persona que sostiene el objeto) el objeto está en equilibrio (no se mueve con respecto a su sistema de referencia que es el ascensor). Tiene que ejercer una tensión para compensar lo que cree ser una fuerza hacia abajo; tensión que medirá y que verá ser igual a $mg + ma$. Su descripción del sistema será una descripción estática (no habla ni de movimiento ni de aceleraciones) en la que el peso aparente del objeto es $m(g + a)$. En definitiva, para este observador no inercial ªpareceüna nueva fuerza hacia abajo, $-ma$, fuerza con la que no cuenta en su descripción el observador ligado al suelo.

2. Colgamos del techo de un vagón una masa por medio de una cuerda. Encontrar el ángulo α que forma la cuerda con la vertical, y su tensión T, cuando el vagón 1) se mueve con un movimiento uniforme sobre raíles horizontales, 2) y cuando lo hace sobre los mismos raíles con una aceleración constante a.

Solución: Cuando el vagón se mueve con velocidad uniforme, la única fuerza externa que actúa sobre la masa m es la gravitacional $m\vec{g}$. Está equilibrada por la tensión de la cuerda $\vec{T}$ al estar la masa en equilibrio: la cuerda está en posición vertical, $\alpha = 0$. Sin embargo, cuando el vagón tiene una aceleración a el efecto de esta aceleración se transmite a la masa a través de la cuerda y la situación será la que se representa en la figura. La inercia, $m\vec{a}$, de la masa mantiene la cuerda con una inclinación α (un observador dentro del vagón, y que no sabe que el vagón está acelerado, deducirá que existe una fuerza, de inercia, $\vec{f} = -m\vec{a}$ que tira de la masa en sentido horizontal y hacia atrás). La tensión de la cuerda equilibrará esta fuerza de inercia y la fuerza gravitatoria vertical.

Por lo tanto,

$$T \sin\alpha = ma$$

$$T \cos\alpha = mg$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos

$$\alpha = \arctan\frac{a}{g}$$

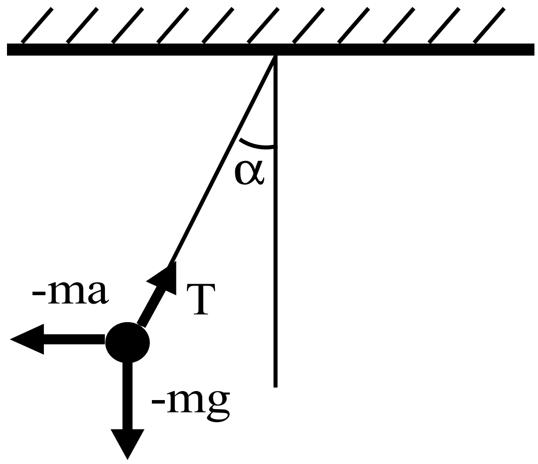

Figura 3: Problema 2.

3. En una prueba de tiro con la cuerda se enfrentan dos equipos de cinco hombres cada uno. Cada hombre pesa 80 kgs. y la fuerza (en Newtons) que ejerce cada individuo sobre la cuerda puede describirse según la siguiente ecuación:

$$F = 100\exp(-t/\tau),$$

en donde τ es el tiempo medio de esfuerzo por hombre (10s para el equipo A y 20s para el equipo B). Si la masa de la cuerda es de 25 Kgs., encontrar el movimiento; a saber, la velocidad de ambos equipos. ¿Qué comentario le merece el resultado y el método de resolución?

Solución: Aplicando la ecuación de Newton

$$F_A - F_B = m_{cuerda}\frac{dv}{dt},$$

$$25dv = 5(100e^{-t/10} - 100e^{-t/20})dt.$$

Podemos suponer que la velocidad inicial es nula, con lo que integrando la ecuación anterior:

$$v = 20(-10e^{-t/10} + 20e^{-t/20} - 10).$$

que integrada a su vez da:

$$x = -200t + 2000(e^{-t/10} - 4e^{-t/20} + 3)$$

Como nos preguntan la velocidad final de la cuerda, para un tiempo largo ($t \to \infty$), obtendremos de la ecuación anterior:

$$v_{final} = -200m/s.$$

El signo menos indica que el movimiento es en la dirección del equipo B; resultado esperable a la luz del mayor tiempo medio de esfuerzo de éste. Sin embargo, la magnitud de la velocidad es un resultado obviamente absurdo. Una razón estriba en que hemos supuesto una fuerza independiente de la velocidad. Otra está en que hemos despreciado la masa de los equipos cuando éstos están en movimiento. Este ejemplo muestra la importancia del análisis crítico del orden de magnitud de los resultados a la hora de juzgar si hemos utilizado un buen modelo o no.

4. Un proyectil de masa m es lanzado al aire en dirección vertical con una velocidad v_0. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad. Determínese el movimiento durante la subida del cuerpo. ¿Qué diferencias existen cuando hacemos lo mismo para el correspondiente movimiento de bajada? ¿Son simétricos ambos movimientos, como en el caso de ausencia de resistencia?

Solución: Podemos escribir la ecuación de Newton para éste caso como

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - c^2v^2, \tag{1}$$

en donde hemos tomado como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y el sentido de alturas crecientes como semieje positivo. La constante en el término de fricción se ha escrito como un cuadrado para resaltar su carácter estrictamente positivo. Separando variables,

$$\frac{mdv}{mg + c^2v^2} = -dt,$$

que reescribimos como:

$$\frac{dv}{\mu^2 + v^2} = -k^2dt,$$

con $k^2 = c^2/m$ y $\mu^2 = g/k^2$. Integrando,

$$\frac{1}{\mu}\arctan\frac{v}{\mu} = -k^2t + C_1,$$

que, con la condición inicial, $v(0) = v_0$, resulta:

$$\frac{1}{\mu}\big(\arctan\frac{v}{\mu} - \arctan\frac{v_0}{\mu}\big) = -k^2t.$$

Si definimos $\gamma = \arctan(v_0/\mu)$ y $\lambda = g/\mu$, obtenemos de la ecuación anterior:

$$v = \tan(\gamma - \lambda t). \tag{2}$$

Una segunda integración, con $y(0) = 0$, lleva a:

$$y = \frac{\mu}{\lambda}\ln\big[\frac{\cos(\gamma - \lambda t)}{\cos\gamma}\big]. \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3) describen el movimiento ascendente del móvil. De (2) obtenemos que la velocidad se anula cuando $t = \gamma/\lambda$, alcanzando el cuerpo su máxima altura. Sustituyendo en (3) encontramos ésta última cómo $\mu/\lambda \ln\sec\gamma$. Nótese que cuando se alcanza ésta altura las ecuaciones anteriores dejan de ser válidas. Cuando el móvil empieza a bajar la resistencia del aire cambia de signo en la ecuación (1), con lo cual debemos resolver de nuevo el problema. No lo haremos aquí por ser el proceso muy parecido. Unicamente haremos hincapié en dos consecuencias. Una es que el tiempo de caída es mayor que el de subida. El otro es que la velocidad con la que alcanza el punto de partida es menor que v_0.

¿Podríamos haber llegado a conocer éstas dos últimas características del movimiento sin necesidad de resolver las ecuaciones? ¿Podría Vd. dar un ar gumento que lléve a éstas conclusiones?

5. Una pequeña bola se mueve en un círculo con velocidad v_0 sobre un plano horizontal dentro de una taza. La superficie interior de la taza se obtiene girando la curva OA alrededor del eje y. Suponiendo que la velocidad de la bola v_0 es proporcional a la distancia x del eje y determínese la curva OA (véase figura).

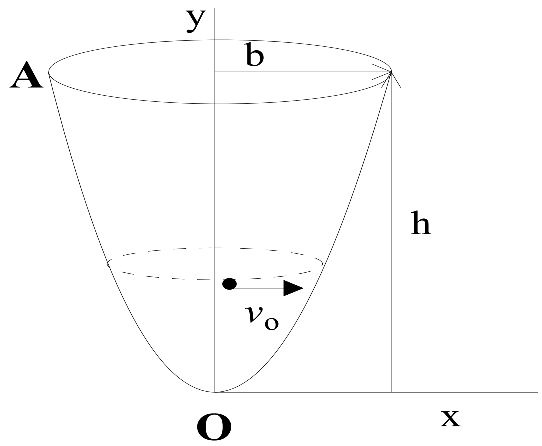

Figura 4: Problema 5.

Solución: Al rodar la bola en un círculo horizontal la fuerza que ejerce la taza sobre ella debe ser perpendicular a la superficie. No debe haber componente vertical, ya que en caso contrario la bola subiría o bajaría. La reacción de la taza ($\vec{N}$) debe equilibrar la fuerza de gravedad sobre la bola y también proporcionar la necesaria fuerza centrípeta que le permita rodar sobre el círculo anterior.

Si queremos obtener la ecuación de la curva podemos partir de la relación que nos da la pendiente de ésta:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}, \tag{1}$$

siendo

$$\tan\theta = \frac{mg}{mv_0^2/r} = \frac{gr}{v_0^2}.$$

Teniendo en cuenta que $r = x$ y que la velocidad es proporcional a x, $v_0^2 = kx^2$, obendremos:

$$\tan\theta = \frac{g}{kx}. \tag{2}$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) e integrando,

$$\frac{kx^2}{2} = gy + C,$$

en donde C es una constante de integración nula al pasar la curva por $x = y = 0$. Nótese que la curva obtenida es una parábola.

Este resultado nos explica la razón por la cual un líquido que gira uniformente (que tiene su velocidad proporcional a la distancia al eje de rotación) genera una superficie paraboloidal.

II. Conservación de la Cantidad de Movimiento

6. Un hombre de 80 kilos de peso, está de pié sobre la parte trasera de un trineo grande, de masa 400 Kg y longitud 18 m, y que se mueve sin rozamiento sobre un lago helado a una velocidad de 4 m/s. El hombre empieza a moverse sobre el trineo y hacia su parte delantera a una velocidad de 2 m/s respecto al trineo. ¿Qué distancia habrá recorrido el trineo sobre el hielo antes de que el hombre llegue a la parte delantera del trineo?.

Solución: Como el hombre se mueve con una velocidad de 2 m/s respecto al trineo, es obvio que tardará 9 segundos en atravesarlo, luego lo único que necesitamos saber es a qué velocidad se mueve el trineo sobre el hielo cuando el hombre se está moviendo.

Para ello basta darse cuenta que al no haber rozamiento ni ninguna otra fuerza exterior el impulso o cantidad de movimiento se tiene que conservar. Para un observador exterior, la cantidad de movimiento antes de que el hombre se empiece a mover es:

$$U_t(M_t + M_h)$$

mientras que después de que haya empezado a moverse es:

$$MtV_t + M_h(V_h + V_t)$$

despejando V_t se obtiene:

$$V_t = \frac{(M_t + M_h)U_t - M_h V_h}{M_t + M_h}$$

Sustituyendo los valores del enunciado se obtiene $V_t = 3ms^{-1}$. Por lo tanto el espacio recorrido por el trineo hasta que el hombre llega a su parte delantera será de $27m$.

7. Las dos masas de la derecha de la figura están inicialmente en reposo y un poco separadas; la masa de la izquierda incide con velocidad V_0. Suponiendo que las colisiones sean frontales, demostrar: a) Si M es menor o igual que m hay dos colisiones. Encontrar las velocidades finales. c) Si M es mayor que m hay tres colisiones. Encontrar las velocidades finales.

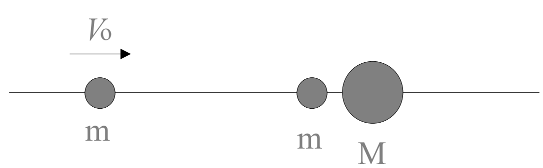

Figura 5: Problema 7.

Solución: La primera colisión de la partícula incidente con la partícula de masa m que está en reposo se puede analizar directamente imponiendo conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, dado que los choques son elásticos (Hágalo). Se obtiene como resultado que toda la cantidad de movimiento se transfiere a la partícula inicialmente en reposo, y la partícula incidente queda en reposo. Por lo tanto el siguiente choque será el de la partícula ahora en movimiento con velocidad V_0 contra la partícula de masa M. Aplicando otra vez conservaciónde la cantidad de movimiento tenemos:

$$mV_0 = mV_1 + MV_2$$

Aplicando conservación de la energía cinética tenemos:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver, por ejemplo, despejando V_2 en la primera ecuación y sustituyendo su valor en la segunda. De esta manera se llega a una ecuación de segundo grado para V_1. Una vez halladas sus dos raíces podemos hallar los valores correspondientes para V_2. Sin embargo, una de las soluciones arroja un valor negativo para V_2, que no es posible físicamente, con lo que esa solución se descarta. Después de estas operaciones los valores que se obtienen son:

$$V_1 = V_0(1 - \sqrt{\frac{M}{m}})$$

$$V_2 = V_0\sqrt{\frac{m}{M}}$$

Si M = m, ambas velocidades son iguales y no se producen más colisiones, luego hay dos colisiones en total.

Si M es menor que m, V_2 es mayor que V_0, mientras que V_1 es positiva,pero menor que V_0, con lo que tampoco pueden volver a chocar y, por lo tanto, solamente hay en total dos choques.

Si M es mayor que m, V_2 es menor que V_0, mientras que V_1 es negativa, con lo que podrá volver a chocar con la partícula que quedó a su izquierda después del primer choque, por lo tanto habrá tres choques en este caso. El tercer choque es análogo al primero, sólo que en este caso será la partícula incidente desde la derecha la que transfiera toda su cantidad de movimiento a la partícula que estaba en reposo.

8. Una bola, con velocidad $V_0 = 10m/s$, choca elásticamente contra otras dos bolas idénticas. Estas dos bolas se encuentran juntas y en reposo, y sus centros están sobre una línea perpendicular a la trayectoria de la bola móvil. Hallar las velocidades de las tres bolas después de la colisión.

Figura 6: Problema 8.

Solución: En el momento del impacto los centros de las tres partículas forman un triángulo equilátero; además, la partícula incidente golpea en la dirección perpendicular a la línea que une los centros de las otras dos. Por lo tanto, hay varias consecuencias de la geometría del problema:

- Las dos partículas de la derecha salen hacia arriba y abajo, respectivamente, formando ángulos de 30^o con la horizontal.

- Las componentes horizontales de sus velocidades son iguales, y las componentes verticales difieren únicamente en el signo.

- La partícula incidente tiene componente vertical de la velocidad igual a cero.

Llamando V_1 y V_2 a las velocidades de las partículas que salen hacia arriba y hacia abajo, respectivamente, y V_3 a la velocidad de la partícula incidente después del choque, podemos escribir las expresiones de la conservación de la componente horizontal de la cantidad de movimiento, y la conservación de la energía cinética (omitimos las masas, dado que es la misma para todas las partículas):

$$V_0 = 2V_{1x} + V3$$

$$V_0^2 = 2V_{1x}^2 + 2V_{1y}^2 + V_3^2$$

además, como sabemos el ángulo con el que salen las partículas de la derecha, sabemos que $V_{1y} = \frac{\sqrt{3}}{3}V_{1x}$, con lo que el sistema se puede resolver, obteniendo:

$$V_1 = (\frac{3}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5})V_0$$

$$V_2 = (\frac{3}{5}, \frac{-\sqrt{3}}{5})V_0$$

$$V_3 = (\frac{-1}{5}, 0)V_0$$

9. Un proyectil se dispara a 45^o con la horizontal y con $500m/s$ de velocidad inicial. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales cae verticalmente. Calcular a qué distancia del cañón cae el segundo al suelo, si la velocidad inicial del primero es nula.

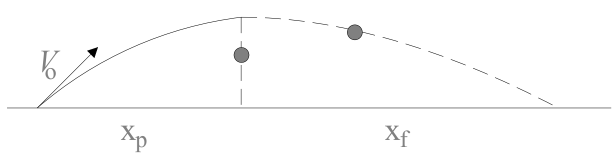

Figura 7: Problema 9.

Solución: En el punto más alto de la trayectoria la velocidad del proyectil tiene las siguientes componentes: $V_x = V_o cos\alpha$, $V_y = 0$. Al ser el proceso de fragmentación intantáneo, la cantidad de movimiento se conserva. Por lo tanto, la componente vertical de la velocidad del segundo fragmento es también cero. Además, para la componente horizontal:

$$mV_o cos\alpha = \frac{m}{2}V_{1x} + \frac{m}{2}V_{2x}; \quad V_{2x} = 2V_o cos\alpha$$

donde hemos usado el hecho de que $V_{1x} = 0$ ya que cae verticalmente. Finalmente, para obtener la distancia de caída solo nos hace falta utilizar las fórmulas correspondientes al movimiento del proyectil. La componente vertical de la velocidad se rige por la ecuación: $V_y = V_o sen\alpha - gt$, por lo tanto el punto más alto se alcanza para $t = \frac{V_o sen\alpha}{g}$, que a su vez coincide con el tiempo de caída hasta el suelo de los fragmentos, ya que ambos caen con componente vertical de la velocidad inicialmente nula. Entonces, el espacio recorrido en la dirección horizontal será, durante la subida del proyectil $x_p = (V_o cos\alpha)t$, y durante la caída del fragmento $x_f = (2V_o cos\alpha)t$. Por lo tanto sustituyendo el valor de t, tendremos

$$X = x_p + x_f = \frac{3V_o^2}{g} sen\alpha\, cos\alpha \approx 38,265\, km.$$

10. Un vaso en reposo explota sobre una mesa y se rompe en tres pedazos. Dos de ellos tienen igual masa y salen despedidos sobre la mesa con la misma velocidad de $30m/s$, formando entre sí un ángulo de 60^o. El tercero tiene una masa triple que la de los otros. Hallar la magnitud y dirección de su velocidad. (Nota: considérese que la mesa no tiene rozamiento)

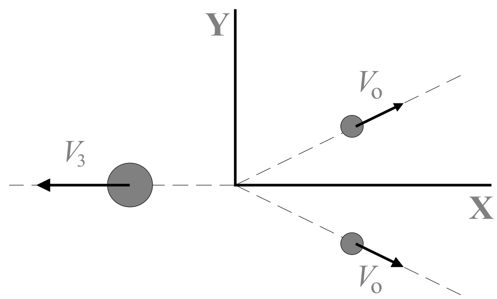

Figura 8: Problema 10.

Solución: Como no hay fuerzas exteriores se conserva la cantidad de movimiento. Para estudiar dicha conservación elegimos el sistema de referencia en el que el vaso está inicialmente en reposo y con el eje X en la dirección de la bisectriz del ángulo de 60^o. En dicho sistema las ecuaciones correspondientes a la conservación de las componentes horizontal y vertical de la cantidad de movimiento son, respectivamente:

$$p_x = 0 = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} + m_3 V_{3x} = mV_o cos\alpha + mV_o cos\alpha + 3mV_{3x}$$

$$p_y = 0 = m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} + m_3 V_{3y} = mV_o sen\alpha - mV_o sen\alpha + 3mV_{3y}$$

De las ecuaciones anteriores se deducen: $V_{3y} = 0$; y $V_{3x} = \frac{2}{3} V_o cos\alpha = 10\sqrt{3} m/s$.

11. Dos partículas con masas $m_1 = 2kg$, y $m_2 = 5kg$ se mueven sin rozamiento sobre un alambre horizontal, con velocidades $v_1 = 17m/s$, y $v_2 = 3m/s$, dirigidas en el mismo sentido y de forma que la partícula más ligera se acerca hacia la más pesada. La partícula pesada tiene en dirección hacia la ligera un resorte ideal sin masa de constante $k = 4480N/m$. Calcule: a) La compresión máxima del resorte al colisionar las dos partículas, b) Las velocidades finales de las dos partículas.

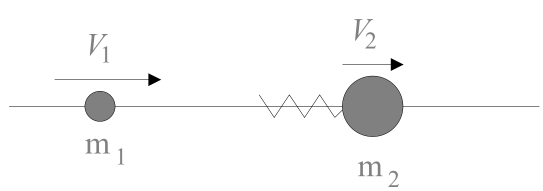

Figura 9: Problema 11.

Solución:

a) Durante la compresión y posterior estiramiento del resorte no se ejercen fuerzas exteriores al sistema, de forma que en todo el proceso se conservan tanto la cantidad de movimiento como la energía total del mismo. Al establecer las ecuaciones de conservación para el momento de máxima compresión del resorte basta darse cuenta que, en ese preciso instante, la velocidad de ambas partículas es idéntica, ya que su velocidad relativa es nula: por lo tanto podemos escribir:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = (m_1 + m_2)V^2 + kx^2$$

donde V representa la velocidad de ambas partículas en el momento de máxima compresión, x la compresión del muelle, y ya se han simplificado los factores 1/2 de las energías. Tenemos por lo tanto un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (V y x), cuya solución es $V = \frac{P}{m_1+m_2}$; y $x = \sqrt{\frac{1}{k}(2E - \frac{P^2}{m_1+m_2})}$; donde P y E son, respectivamente, el momento total inicial y la energía total inicial, es decir: $P = m_1v_1 + m_2v_2 = 49Kgms^{-1}$, y $E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 311,5Julios$. Sustituyendo los valores anteriores en las fórmulas respectivas se obtiene $V = 7ms^{-1}$, y $x = 0,25m$.

b) Escribiendo otra vez las ecuaciones de conservación para el proceso de estirado del muelle se tiene:

$$P = m_1V_1 + m_2V_2$$

$$2E = m_1V_1^2 + m_2V_2^2$$

Despejando V_1 en la ecuación de arriba y sustituyendo en la de abajo tenemos

$$V_1 = \frac{P - m_2V_2}{m_1}$$

$$V_2^2 - 14V_2 + 33 = 0$$

La ecuación en V_2 tiene dos soluciones posibles que son 11 y 3 ms^{-1}, que al sustituir en la ecuación para V_1 nos dan, respectivamente, -3 y 17 ms^{-1}. Por lo tanto la única solución con sentido físico es $V_1 = -3ms^{-1}$, y $V_2 = 11ms^{-1}$.

12. **Una bola de masa m cae verticalmente desde una cierta altura sobre un plano inclinado (con ángulo α). El choque de la bola con el plano es elástico y la cantidad de movimiento comunicada al plano es p. Se pide: a) ¿desde qué altura se dejó caer la bola? b) el tiempo transcurrido desde el choque con el plano hasta que la bola alcance el punto más alto de sutrayectoria; c) Si $m = 100g$, $\alpha = 30^o$ y $p = 1,73$ Ns, hallar los valores numéricos de las variables problema en a) y b).**

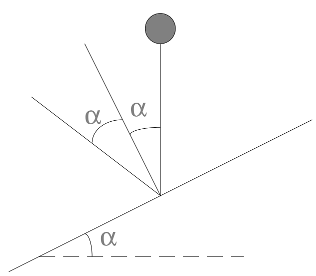

Figura 10: Problema 12.

Solución:

a) $p = mv_y$, y $v_y = \frac{p}{m} = \sqrt{2gh}$; por lo tanto $h = \frac{p^2}{2gm^2} = 15,27m$.

b) Por conservación del momento la bola, al rebotar, sale con la misma velocidad, y ángulo 2α con la vertical.

$$v_y = v_{o_y} - at = \frac{p}{m}\cos 2\alpha - gt$$

En el punto más alto $v_y = 0$ y

$$t = \frac{p}{mg}\cos 2\alpha = 0,88s$$

c) Los resultados numéricos son los obtenidos en los apartados a) y b).

13. Una masa de 2 Kg que se mueve con velocidad de $7m/s$ choca y se queda pegada con otra masa de 6 Kg que está inicialmente en reposo. La masa combinada choca y se queda pegada a otra masa de 2 Kg, también inicialmente en reposo. Si las colisiones son frontales, hallar: a) la velocidad final del sistema, b) la energía total perdida en los choques.

Solución:

a) Los dos choques que se mencionan en el enunciado son choques inelásticos y por lo tanto en ambos se conserva el momento lineal pero no la energía. Por lo tanto los dos se resuelven de la misma manera aplicando conservación de la cantidad de movimiento. Para el primer choque:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2; \quad v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{7}{4} m/s$$

Para el segundo choque:

$$(m_1 + m_2) v_2 = (m_1 + m_2 + m_3) v_3; \quad v_3 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} v_2 = \frac{7}{5} m/s$$

b) La energía perdida será la diferencia entre la energía cinética antes de cada choque y la energía cinética después de cada choque. Para el primer choque:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = \frac{147}{4} Julios$$

Para el segundo choqe:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3) v_3^2 = \frac{49}{20} Julios$$

14. **La masa total inicial de un cohete es 30.000 kg, de la cual el 80 % corresponde a combustible. El combustible se quema a razón de 200 kg/s y se expulsa gas con una velocidad relativa de 1,8 km/s. Determinar a) la fuerza de impulsión del cohete, b) el tiempo transcurrido hasta la combustión total, c) su velocidad final suponiendo que se mueve hacia arriba cerca de la superficie terrestre donde el campo gravitatorio g es constante.**

Solución:

a) Como el combustible se quema a una razón de 200 kg/s la masa del cohete sufre una variación con el tiempo de forma que $m = m_i - 200t$. Por lo tanto la fuerza de impulsión será igual a la variación de la cantidad de movimiento del cohete, es decir:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d\left[(m_i - 200t)(-v_g)\right]}{dt} = 200 v_g = 3,6 \times 10^5 \mathrm{N}$$

b) Como solamente el 80 % de la masa del cohete corresponde a combustible, el tiempo transcurrido hasta la combustión total será $T = 120$ segundos.

c) Suponiendo que el campo gravitatorio es constante, la fuerza que se ejerce sobre el cohete es $F_{ext} = -mg$. Por lo tanto según la segunda ley de Newton $\Delta p = F_{ext}$, con loque

$$v_g \frac{dm(t)}{dt} + m(t) \frac{dv}{dt} = -mg; \quad oloqueeslomismo \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{v_g}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt}$$

Integrando ambos miembros de la ecuación entre 0 y T obtenemos

$$v = -gT - v_g ln(\frac{m_f}{m_i}) = 1.680 \mathrm{ms}^{-1}$$

15. **En lo alto de un poste de 30 m de altura se encuentra un bote de masa $M = 500g$. Un muchacho situado a 20 m de la base del poste dispara contra el bote un proyectil de $m = 10g$, que realiza una trayectoria rectilínea y choca con el bote a una velocidad de 450 m/s. Suponiendo que el proyectil se incrusta en el bote, a) ¿a qué altura por encima del poste se elevará el bote?, b) ¿a qué distancia de la base del poste caerá el bote al suelo?, c) ¿cuánto tiempo tardará el bote en caer al suelo?**

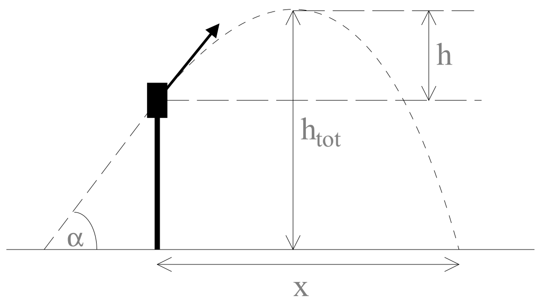

Figura 11: Problema 15.

Solución:

a) Al incrustarse el proyectil en el bote, el choque es inelástico, con lo que se conserva la cantidad de movimiento pero no la energía. Por lo tanto, la velocidad del sistema proyectil más bote inmediatamente después del choque cumple:

$$mV = (m + M)v_o \;\; dedonde, \;\; v_o = \frac{mV}{m + M} = 8,82ms^{-1}$$

A partir de entonces el movimiento es de tipo parabólico, ya que solo existe la aceleración de la gravedad. Por lo tanto, para calcular a qué altura sube, basta con calcular a qué altura la componente vertical de la velocidad se anula, es decir:

$$v_y = v_o \; sen\alpha \; - \; gt \; = \; 0$$

o lo que es lo mismo $t = \frac{v_o sen\alpha}{g}$, que sustituyendo en la expresión para el espacio recorrido en la dirección vertical, nos da:

$$h = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{(v_o sen\alpha)^2}{2g} = 2,75m$$

b y c) El tiempo de subida se puede calcular directamente de la fórmula encontrada en el apartado anterior $t_s = \frac{v_o sen\alpha}{g} = 0,734s$. El tiempo de bajada se puede obtener a partir de:

$$h_{tot} = 30 + h = \frac{1}{2}gt_b^2; \;\; t_b = \sqrt{2h_{tot}g} = 2,66s$$

Por lo tanto el tiempo pedido será $t_s + t_b = 3,39s$.

Finalmente, la distancia horizontal a la que caerá el bote se puede calcular sabiendo que en la horizontal no actúa ninguna aceleración, con lo cual:

$$x = v_o cos\alpha t = 16,6m$$

16. **El sistema de la figura está formado por dos bolas perfectamente elásticas, de masas M y 3M, colgadas mediante hilos de modo que pueden oscilar en el plano de la figura y que realizan**

impactos directos. Si las dos bolas se elevan inicialmente una misma altura h con respecto al punto más bajo de sus trayectorias posibles, a) hallar las velocidades de ambas bolas después del primer choque, b) hallar las velocidades de ambas bolas después del segundo choque. Supóngase ahora que en vez de alzar las dos bolas a una misma altura, se deja la de menor masa en su posición de equilibrio y se alza una altura h solamente la bola más pesada, c) ¿cuales serán las velocidades de ambas bolas después del primer choque?, d) ¿y después del segundo?

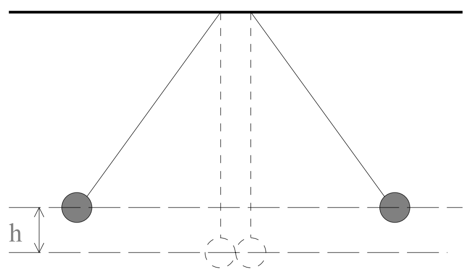

Figura 12: Problema 16.

Solución:

a) La velocidad de las dos bolas antes del choque se calcula por conservación de la energía. Para la bola más ligera se tiene

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = Mgh \;\Rightarrow\; v_1 = \sqrt{2gh}$$

mientras que para la otra, la velocidad es la misma pero en dirección contraria, es decir $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Como el choque ocurre en la parte más baja de la trayectoria, se puede considerar que es en una dimensión (horizontal), por lo que, aplicando la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, calculamos las velocidades justo después del primer choque

$$\begin{aligned} Mv_1 - 3Mv_2 &= Mv_1' + 3Mv_2' \\ \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}3Mv_2^2 &= \frac{1}{2}Mv_1'^2 + \frac{1}{2}3Mv_2'^2 \end{aligned}$$

que, usando el valor anterior para las velocidades iniciales, nos conduce a

$$\begin{aligned} v_1' + 3v_2' &= -2\sqrt{2gh} \\ v_1'^2 + 3v_2'^2 &= 8gh \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos las dos soluciones $v_1' = \sqrt{2gh}$; $v_2' = -\sqrt{2gh}$ y $v_1' = -2$ $sqrt2gh$; $v_2' = 0$. La primera de ellas es absurda pues indica que no hay choque, así que la correcta es la segunda, que indica que la bola más pesada se queda parada, mientras que la más ligera sale rebotada con velocidad doble que la que llevaba antes del choque. Así pues la solución es

$$v_1' = -2\sqrt{2gh} \quad v_2' = 0$$

b) Para el segundo choque las velocidades iniciales son ahora $v_1 = 2\sqrt{2gh}$ y $v_2 = 0$, por lo que la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía conduce a las ecuaciones (hemos multiplicado por 2 la ecuación para la energía)

$$\begin{aligned} Mv_1 &= Mv_1' + 3Mv_2' \\ Mv_1^2 &= Mv_1'^2 + 3Mv_2'^2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, con el valor conocido de $v_1 = 2\sqrt{2gh}$, de nuevo se encuentran dos soluciones, de las cuales sólo una tiene sentido, pues la otra significa que no ha habido choque, lo que es absurdo. La solución con sentido físico es

$$v_1' = -\sqrt{2gh} \quad v_2' = \sqrt{2gh}$$

que indica que se van a repetir las condiciones previas al primer choque (el movimiento se repite cada dos choques).

c) El procedimiento es exactamente el mismo que para los dos apartados anteriores. Ahora las velocidades iniciales son $v_1 = 0$ y $v_2 = -\sqrt{2gh}$ (el signo $-$ indica que la bola se está moviendo hacia la izquierda en el momento del choque). Aplicando de nuevo la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, y resolviendo el sistema de ecuaciones, la solución con sentido físico es

$$v_1' = \frac{3}{2}v_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2gh} \quad v_2' = \frac{1}{2}v_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$$

de forma que las dos bolas se mueven hacia la izquierda, y la más pesada reduce su velocidad a la mitad y le cede la mitad de su cantidad de movimiento a la más ligera.

d) Como el periodo de un péndulo simple no depende de la masa de la lenteja, las dos bolas volveran a chocar cuando vuelvan a encontrarse en la posición inferior, que es cuando ha pasado un semiperiodo, y llegan las dos con las velocidades calculadas en el apartado anterior, pero cambiadas de signo (la bola más ligera alcanza a la más pesada ya que lleva mayor velocidad), es decir, que las velocidades antes del choque son $v_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2gh}$ y $v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$. De nuevo las leyes de conservación conducen a la única solución con sentido físico que es

$$v_1' = 0 \ ; \ v_2' = \sqrt{2gh}$$

por lo que, de nuevo, se van a repetir las condiciones previas al primer choque (como ocurría en el apartado b).

III. Trabajo y Energía

17. ¿Cuál es la fuerza media necesaria para parar una bala de masa 20 grs. y velocidad 250 m/s cuando penetra en un bloque de madera una distancia de 12 cm?

Solución: Cuando viaja dentro del bloque la bala experimenta una fuerza media, $\vec{F}_{med}$, que la frena. El trabajo hecho por la fuerza neta sobre la bala es igual a la variación de energía cinética.

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1/2mv_f^2 - 1/2mv_0^2.$$

Sabiendo que $\vec{F}$ tiene un valor medio:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} \simeq \vec{F}_{med} \cdot \Delta\vec{s} = \vec{F}_{med}\Delta\vec{s}\cos\theta,$$

en donde θ es el ángulo, en éste caso π radianes, que forman $\vec{F}_{med}$ y $\Delta\vec{s}$. En consecuencia,

$$\vec{F}_{med} = \frac{1/2mv_0^2 - 1/2mv_f^2}{\Delta\vec{s}}.$$

Sustituyendo los valores numéricos obtenemos $\vec{F}_{med} = 5,2 \times 10^3$ newtons. Esta fuerza es 30.000 veces mayor que el peso de la bala.

18. Un cuerpo de masa m y pequeñas dimensiones desliza sin rozamiento por el rail de la figura partiendo desde el punto A en reposo. Si $\mathrm{OA} = 3R$, hallar: a) el módulo de la velocidad en B, en C, y en D, siendo $\mathrm{BD} = 5R$, b) la fuerza resultante sobre el rail en C, c) cuánto debe valer OA para que dicha fuerza sea nula.

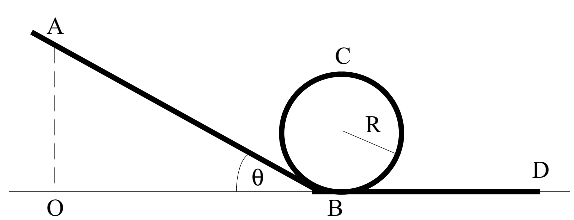

Figura 13: Problema 18.

Solución:

a) En el sistema se conserva la Energía total. Por lo tanto, tomando como origen de energía potencial el plano inferior, tenemos:

$$mgh_A = \frac{1}{2}mV_B^2; \qquad V_B = \sqrt{6gR}$$

$$mgh_C + \frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}mV_B^2; \qquad V_C = \sqrt{2gR}$$

$$mgh_A = \frac{1}{2}mV_D^2; \qquad V_D = V_B = \sqrt{6gR}$$

b) La fuerza en el punto C será la diferencia entre el peso y la fuerza centrífuga, luego:

$$F_C = F_{cent} - mg = m\frac{V_C^2}{R} - mg = mg$$

c) Del apartado anterior se deduce que para que F_C sea nula, la velocidad en C tiene que ser $V_C = \sqrt{gR}$. Por tanto, basta aplicar otra vez la conservación de la Energía para obtener h_A:

$$mgh_A = mgh_C + \frac{1}{2}mV_C^2; \qquad h_A = \frac{5}{2}R$$

19. **En una montaña rusa hay un tramo formado por un círculo vertical de 5 m de radio. Se pide: a) ¿cual es la velocidad mínima con la que ha de llegar la vagoneta a la parte inferior para que no se caiga de la pista? b) ¿a qué altura se soltará la vagoneta si la velocidad de entrada es un 25 % inferior a la del aparatado a)?**

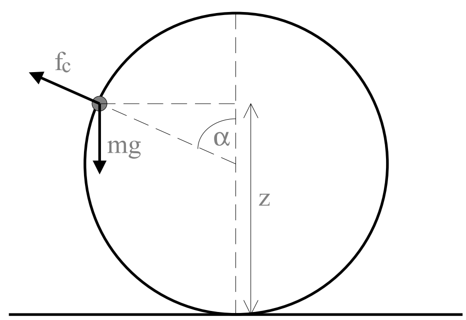

Figura 14: Problema 19.

Solución:

a) En la parte superior del círculo de la figura se verificará:

$$m\frac{v^2}{r} = mg.$$

Por lo tanto, $v = 7m/s$. La velocidad de entrada, v_0, se deduce de:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

de donde $v_0 = 15,65m/s$

b) La vagoneta se saldrá cuando la componente radial del peso sea inferior a la fuerza centrífuga. Si lleva una velocidad inicial $V_0 = 0,75v_0$, a una altura z tendremos

$$V^2 = V0^2 - 2gz. \tag{1}$$

Se ha de verificar:

$$m\frac{V^2}{r} = mg\cos\alpha. \tag{2}$$

Teniendo en cuenta, a partir de lo calculado en (a), que $v_0^2 = 5gr$, podemos obtener, utilizando las ecuaciones (1) y (2), que:

$$\cos\alpha = \frac{45}{16} - \frac{2z}{r}$$

Simultáneamente, se deduce de la figura:

$$\cos\alpha = \frac{z-r}{r}.$$

Igualando ambas expresiones de $\cos\alpha$ y despejando z se obtiene: $z = 6,35$ m.

20. **Del techo de un vagón de 10 Tm pende una esfera colgada de un hilo. El conductor aplica el freno durante tres segundos, cambiando la velocidad uniformemente de 18 km/hora a 6 km/hora. Hallar: a) el trabajo realizado por la fuerza de frenado durante ese tiempo; b) el ángulo máximo de desviación del hilo que soporta la esfera.**

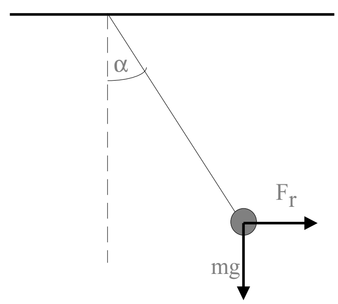

Figura 15: Problema 20.

Solución:

a) La aceleración de frenada al pasar de v_0 a v_t en $t = 3$ seg. es:

$$a = \frac{v_t - v_0}{t} = 1,1 m/s^2$$

, mientras que el espacio recorrido durante la frenada es:

$$x = \frac{v_t + v_0}{2} t = 10m$$

, y el trabajo de frenada es:

$$W = F_r \cdot x = Max = \frac{1}{2} M v_t^2 - v_0^2 =$$

en donde M es la masa del vagón.

b) Siendo F_i es la fuerza de inercia, debida al frenado, que actua sobre la esfera y mg es el peso de ésta, igualamos las componentes de ambas en la dirección perpendicular al hilo:

$$mg \sin\alpha = ma \cos\alpha; \qquad \tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{1,1}{9,8}$$

quedando $\alpha = 6,4^o$.

21. **En el sistema de la figura el bloque A desliza sin rozamiento hasta chocar elásticamente con la bola B. Calcúlese: a) la velocidad de B, inmediatamente después del choque; b) la tensión máxima del hilo; c) altura máxima que alcanza B.** Datos: $m_A = 500g$, $m_B = 240g$, $h = 60$ cm, $\ell = 90$ cm.

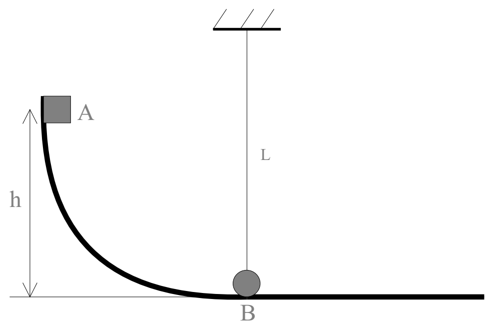

Figura 16: Problema 21.

Solución:

a) Calculamos la velocidad de A en el momento del choque es:

$$m_A g h = \frac{1}{2} m_A v_A^2; \qquad v_A = \sqrt{2gh}.$$

Para calcular la velocidad de B después del choque elàstico aplicamos los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética:

$$m_A v_A = m_A V_A + m_B v_B$$

$$m_A v_A^2 = m_A (V_A)^2 + m_B v_B^2$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene

$$V_A = v_A \left(1 - \frac{2m_B}{m_A + m_B}\right); \quad v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} = 4,68 \mathrm{ms}^{-1}$$

Por conservación del momento:

$$v_B = \frac{m_A v_A}{m_B} = \frac{m_A}{m_B}\sqrt{2gh} = 7,14 m/s$$

b) Después del choque la tensión es

$$T = m_B g \cos\alpha + m_B \frac{v^2}{\ell}$$

v se calcula por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m g H$$

de donde

$$v^2 = v_B^2 - 2gH = v_B^2 - 2g\ell(1 - \cos\alpha)$$

Sustituyendo en la expresión de la tensión:

$$T = m_B v_B^2/\ell - 2m_B g + 3 m_B g \cos\alpha$$

La tensión máxima se alcanzará cuando $\cos\alpha = 1$, es decir, cuando $\alpha = 0^o$.

c) En el punto más alto alcanzado por B:

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 = m_B g h_B; \quad \text{es decir} \quad h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 2,60 m$$

Siendo el hilo inextensible y h_B mayor que el diámetro, resulta: $h_{max} = 2\ell = 1,80 m$.